Институт по математика и информатика при БАН

Съюз на математиците в България

Факултет по математика и информатика; Софийски университет

Студентско състезание за решаване на задачи
10.04 – 10.05 2025

Поканени са за участие отбори от 1 до 3 студенти. Позволено е използването на всякакви материали. Забранено е да се търси помощ от никого, освен от членовете на своя отбор. Ще има награди. Не за всички задачи са известни решения.

Имейл за въпроси и предаване на решения: jiocb@math.bas.bg. Ще се извършат класирания по общите задачи, по проекти (най-добрият проект на отбор) и комплексно. Възможно е участие само с един проект.

Общи задачи. **1.** Нека са дадени две неуспоредни прави L_1 и L_2 в $\mathbb{R}^2$. Нека $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ е определено с формулата $p(x, y) = (x \mod 1, y \mod 1)$. Намерете кардиналността на $p(L_1) \cap p(L_2)$.

2. Нека точките A и B са външни за окръжност ω с център O. Нека X е точка върху ω, така че $\angle AXO = \angle BXO$. Докажете, че задачата за намиране на X може да се сведе до решаване на уравнение $f(t) = 0$, където f е полином от четвърта степен с коефициенти, зависещи от координатите на A, B и O и радиуса на ω. Освен това, покажете, че множеството от такива полиноми f има положителна мярка в пространството на всички полиноми от четвърта степен с реални коефициенти.

3. Черната кутия на безкрайна редица $(a_1, a_2, \ldots)$ от реални числа генерира нова редица $(b_1, b_2, \ldots)$, където $b_k = a_k a_{k+2} - a_{k+1}^2$ за всяко $k \geq 1$. Докажете, че от хармоничната редица $(1, 1/2, 1/3, \ldots)$ чрез приложения на черната кутия могат да се получат само редици с неотрицателни числа.

4. Нека $F(x, y, z)$ е хомогенен полином от степен 6, такъв че множеството от реални решения на уравнението $F(x, y, z) = 0$ в $\mathbb{R}P^2$ е крайно. Какъв може да бъде техният брой?

5. Нека $r > 0$, а $M \subset \mathbb{R}^2$ е **a)** крайно множество; **b)** компактно множество, и нека Σ е свързано множество с минимална хаусдорфова мярка $\mathcal{H}^1(\Sigma)$, такова че M се съдържа в затворената r-околност на Σ, т.е. $M \subset \overline{B_r(\Sigma)}$. Нека Σ' е свързано множество с минимална $\mathcal{H}^1(\Sigma')$, такова че $\Sigma \subset \overline{B_r(\Sigma')}$. Вярно ли е, че $\Sigma' = \Sigma$?

Проект 1. Да означим n-тия член на редицата на Фибоначи с F_n. Намерете (и докажете) разлаганията във верижни дроби на следните изрази: **1.** $\frac{F_n}{F_{n+1}}$; **2.** $\frac{F_n}{F_{n+2}}$; **3.** $\frac{F_n^2}{F_{n+1}^2}$; **4.** $\frac{F_n^2}{F_{n+2}^2}$.

Проект 2. Нека M е множеството от вектори с дължина $\sqrt{k}$, чиито координати са 0 или ± 1 в d-мерното Евклидово пространство, такива че никои два от тях нямат скаларно произведение -1. Намерете максималната стойност на $|M|$, ако: **1.** $k = 2$; **2.** $k = 3$; **3.** $k = 4$; **4.** $k = 5$.

Проект 3. Разглеждаме равномерна схема на Бернули върху канторовото пространство $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ с равномерната вероятностна мярка върху $\{0, 1\}$. Нека $A \subset \Omega$ е измеримо множество.

1. За фиксирано $x \in \Omega$ нека n-тият диадичен интервал $\Delta_n(x) \ni x$ е множеството с мярка $1/2^n$, дефинирано чрез фиксиране на първите n координати. Докажете, че за почти всяко $x \in A$ условната вероятност $P(A \mid \Delta_n(x))$ клони към 1, когато $n \to \infty$.

2. За фиксирано $x \in \Omega$ дефинираме $\Delta_{n,m}(x)$ като множеството от точки, чиито първи n координати с четни индекси и първи m координати с нечетни индекси съвпадат с тези на x. Докажете, че за почти всяко $x \in A$ условната вероятност $P(A \mid \Delta_{n,m}(x))$ клони към 1, когато $\min(m, n) \to \infty$.

3. Определете за кои семейства от крайни подмножества от индекси подобно твърдение е вярно.

Успех!