



ПРЕДЛОЖЕНИЕ

за провеждане на докторантура в редовна форма на обучение
по реда на чл. 21, ал. 7 от ЗВО
в Института по математика и информатика при Българска академия на науките

професионално направление 4.5. Математика
докторска програма „Математическо моделиране и приложение на математиката“
научноизследователска област: А. Иновативни математически методи и модели в
подкрепа на цифровата трансформация
(Осигуряване на качество и ефективна обработка на данни)

тема на докторантурата: Задача на Гилбърт-Щайнер
научен ръководител: доц. д.н. Данила Черкашин

Актуалност

Задачата за оптимизация на разклоняващ се транспорт (пренос) се среща често и в практиката (като комуникации или електро-, водо- и газоразпределение), и в природата (например жилищване на листа, коренови системи на дървета и т.н.). Задачата на Гилбърт-Щайнер е математически модел на транспорта, който допуска използването на допълнителни възли, неприсъстващи първоначално в носещите мерки.

Малко по-неформално, задачата е да се намери мрежа с минимална стойност, която транспортира масите m_1, m_2, \dots, m_k , разположени съответно в точките A_1, \dots, A_k , към масите n_1, \dots, n_l , разположени съответно в точките B_1, \dots, B_l (общите суми на масите са равни), като разходите за транспортиране по даден сегмент са линейно зависими от дължината на сегмента и пропорционални на m^p за фиксиран параметър $0 < p < 1$. Например, $p = 1/2$ съответства на случай на обикновена тръба (разходите за материал са пропорционални на радиуса, а проводимостта – на площта на напречното сечение).

Добре е известно (от 1960-те години насам), че в двумерния случай степента на който и да е разклоняващ се възел (който не е начален или краен) в оптималната мрежа, е не по-голяма от 3, но това беше строго доказано едва през 2023 г. Въпросите за локалното поведение на оптималните решения в по-високи размерности остават широко отворени. По-специално, липсата на нетривиални и практически удобни горни граници за степента на допълнителните върхове значително забавя съществуващите алгоритми за задачата на Гилбърт-Щайнер.

Цел на докторантурата

- Усъвършенстване на горните и долните граници на степента на разклоняващ се възел в оптималната мрежа, които зависят от p и от размерността.
- Получаване на горна граница на степента на разклоняващ се възел в оптималната мрежа, която зависи само от размерността (и не зависи от p).
- Приложение на получените подобрени оценки към съществуващи алгоритми върху класически примери (например разклонен транспорт на мярка на Дирак към мярка на Лебег).

Научни задачи и методи за изпълнение

За долната граница при първата цел ще използваме теорема на Волц, Бразил, Рас, Суонепол и Томас (2009), която дава достатъчно условие за съществуване на t -разклонение в случая $k = 1$ (случай на напояване). За горната граница ще модифицираме съществуващи техники за горни граници от теорията на кодирането (линейно програмиране, семидефинитно програмиране).

За втората цел планираме да използваме положителни ядра (Фурие-подобна трансформация на ценовата функция).

За третата цел планираме да използваме модификация на алгоритъма GeoSteiner за задачата на Гилберт-Щайнер.

Очаквани резултати

- Пълно изясняване на възможното локално поведение на минимизатора на Гилберт-Щайнер в тримерното пространство.
- Усъвършенстване на съществуващите долни и горни граници на степента на разклоняващ се възел в по-високи размерности.
- По-точно моделиране на транспорта на мярка на Дирак към мярка на Лебег върху интервал.

Въздействие

Задачите на оптималния разклоняващ се транспорт намират активно приложение в градоустройството, икономическото моделиране и много други области на съвременния живот. Настоящият проект е посветен на качествено изследване на регулярността на един от основните модели – задачата на Гилберт-Щайнер, която адресира най-важните форми на транспортната задача.

Резултатите от докторантурата имат реален потенциал да подобрят моделирането на описаните процеси, както на теоретично, така и на изчислително (практическо) ниво.

Място на зачисляване

Секция „Математически основи на информатиката“ (ИМИ-БАН)

Използвана научна инфраструктура

Хемус