Geometry of numbers

Hermann Minkowski

Life

Hermann Minkowski

Family

- Baruch ben Jakob from Shklov (1752-1810), judge in Minsk, studied medicine in England, published a translation of the first 6 books of Euclid from Greek into Hebrew
- his grandson, Isaak ben Aaron, took the name *Minkowski*, his grandson, Levin, was the father of Hermann Minkowski

Family

- Baruch ben Jakob from Shklov (1752-1810), judge in Minsk, studied medicine in England, published a translation of the first 6 books of Euclid from Greek into Hebrew
- his grandson, Isaak ben Aaron, took the name *Minkowski*, his grandson, Levin, was the father of Hermann Minkowski
- Siblings: Max (business, French consul), Oskar (surgeon, discovered the connection between diabetes and pancreas, professor in Breslau), Fanny, Toby

Hermann Minkowski – CV

- born June 22, 1864 in Alexoten, high school in Königsberg
- 1880-1885 Studies: 5 semesters in Königsberg (Weber), 3 semesters in Berlin (Kummer, Kronecker, Weierstrass)
- 1883 Grand Prix of the French Academy of Sciences
- 1885 Ph.D. in Königsberg, army service
- 1892 nontenured Professor Bonn
- 1895 Ordentlicher Professor Königsberg
- 1896-1902 Professor in Zürich
- 1902-1909 Professor in Göttingen

Obituary

Hermann Minkowski.

Gedächtnisrede, gehalten in der öffentlichen Sitzung der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen am 1. Mai 1909

von

David Hilbert.

(Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1909.)

Einen schweren unermeßlichen Verlust haben zu Beginn des Jahres 1909 unsere Gesellschaft, unsere Universität, die Wissenschaft und wir alle persönlich erlitten: durch ein hartes Geschick wurde uns jäh entrissen unser Kollege und Freund Hermann Minkowski im Vollbesitz seiner Lebenskraft, aus der Mitte freudigsten Wirkens, von der Höhe seines wissenschaftlichen Schaffens.

Seinem Andenken widmen wir diese Stunde.

Hermann Minkowski wurde am 22. Juni 1864 zu Alexoten in Rußland geboren, kam als Knabe nach Deutschland und trat Oktober 1872 im Alter von $8^1/_4$ Jahren in die Septima des Altstädtischen Gymnasiums zu Königsberg i. Pr. ein. Da er von sehr rascher Auffassung war und ein vortreffliches Gedächtnis hatte, wurde er auf mehreren Klassen in kürzerer als der vorgeschriebenen Zeit versetzt und verließ das Gymnasium schon März 1880 — noch als Fünfzehnjähriger — mit dem Zeugnis der Reife.

Ostern 1880 begann Minkowski seine Universitätsstudien. Insgesamt hat er 5 Semester in Königsberg, vornehmlich bei Weber und Voigt, und 3 Semester in Berlin studiert, wo er die Vorlesungen von Kummer, Kronecker, Weierstraß, Helmholtz und Kirchhoff hörte.

“He died as a philosopher...”

seines Gemütes, so voll in der Beständigkeit und Zuverlässigkeit, so rein in seinem idealen Streben und seiner Lebensauffassung.

Wie er gelebt hat, so starb er — als Philosoph. Wenige Stunden noch vor seinem Tode traf er die Anordnungen über die Korrektur seiner im Druck befindlichen Arbeit und überlegte, ob es sich empfehlen würde, seine unfertigen Manuskripte zu verwerten. Er sprach sein Bedauern über sein Schicksal aus, da er doch noch vieles hätte machen können; seiner letzten elektrodynamischen Arbeit aber würde es vielleicht zugute kommen, daß er zur Seite trete — man werde sie mehr lesen und mehr anerkennen. Zum Abschiednehmen verlangte er nach den Seinigen und nach mir.

Mehr als sechs Jahre hindurch haben wir, seine nächsten mathematischen Kollegen, jeden Donnerstag pünktlich drei Uhr mit ihm zusammen den mathematischen Spaziergang auf den Hainberg gemacht — auch den letzten Donnerstag vor seinem Tode, wo er uns mit besonderer Lebhaftigkeit von den neuen Fortschritten seiner elektrodynamischen Untersuchungen erzählte: den Donnerstag darauf — wiederum um drei Uhr — gaben wir ihm das letzte Geleit. Dienstag, den 12. Januar, mittags, war er einer Blinddarmentzündung erlegen; bei dem bösartigen Charakter, mit dem die Krankheit auftrat, hatte auch die Sonntag Nacht ausgeführte Operation nicht mehr helfen können.

Jäh hat ihn der Tod von unserer Seite gerissen. Was uns aber der Tod nicht nehmen kann, das ist sein edles Bild in unserem Herzen und das Bewußtsein, daß sein Geist in uns fortwirkt.


HERMANN MINKOWSKI
22·6·1864 - 12·1·1909
OSKAR MINKOWSKI
13·1·1858 - 18·6·1931


HERMANN MINKOWSKI
22·6·1864 - 12·1·1909
OSKAR MINKOWSKI
13·1·1858 - 18·6·1931

Letter from the Mayor

Der Regierende Bürgermeister von Berlin
Senatskanzlei

be Berlin

Der Regierende Bürgermeister von Berlin
Senatskanzlei – 10871 Berlin (Postanschrift)

Herrn
Professor Yuri Tschinkel
New York University
Courant Institute of Mathematical Sciences
251 Mercer Street
New York, NY 10012-1185
USA

GeschZ. (bei Antwort bitte angeben)
SKzl IV A/H

Bearbeiter/in:
Herr Thurau

Dienstgebäude: Berlin-Mitte
Berliner Rathaus, 10178 Berlin
Eingang Rathausstraße

Tel. Durchwahl (030) **90 26-2612**
Zentrale (030) 90 26-0
Intern 926

Fax Durchwahl (030) **90 26-2462**
Zentrale (030) 90 26-2013

hans-peter.thurau @senatskanzlei.berlin.de
www.berlin.de/senatskanzlei

Datum **22.07.2014**

Sehr geehrter Herr Professor Tschinkel,

der Herr Regierende Bürgermeister hat mich gebeten, Ihnen für Ihr Schreiben vom 5. Juli 2014 zu danken.

Die Würdigung des großen Mathematikers Hermann Minkowskis anläßlich dessen 150. Geburtstages mit einem Kranz des Regierenden Bürgermeisters und die Nichtverlängerung der Anerkennung der Grabstätte der Brüder Minkowski als Ehrengrabstätte des Landes Berlin stellen keinen Widerspruch in sich dar, auch wenn es vordergründig den Anschein haben mag.

Erlauben Sie mir, Ihnen die seit 2007 geltenden Voraussetzungen zu schildern, unter denen eine Grabstätte als Ehrengrabstätte des Landes Berlin anerkannt werden kann. Mit dieser Darstellung möchte ich Ihnen zugleich verdeutlichen, dass eine Berliner Ehrengrabstätte nicht die Funktion hat, die Sie ihr vielleicht zuschreiben.

Grabstätten um Berlin in hervorragender Weise verdienter Persönlichkeiten können auf Beschluss des Senats befristet als Ehrengrabstätten des Landes Berlin anerkannt werden. Aus der Befristung (zurzeit von 20 Jahren) wird deutlich, dass mit einer solchen Anerkennung nicht die Setzung eines Denkmals intendiert ist und/oder die postume Würdigung von Verdiensten im Vordergrund steht. Vielmehr, und deshalb ist dies auch unabdingbares Kriterium der Anerkennung (und auch ihrer ausnahmsweisen Verlängerung), soll mit dieser Anerkennung einem in der allgemeinen Öffentlichkeit fortlebenden Andenken an die verstorbene Persönlichkeit Rechnung getragen werden. Anders als bei der Benennung öffentlicher Straßen, Plätze und Gebäude, die dem Grundzug einer Denkmalsetzung und der Würdigung von Verdiensten folgen, steht bei der befristeten Ehrengrabanerkennung bei vorausgesetzten hervorragenden Verdiensten eine deutliche Popularität der verstorbenen Persönlichkeit im Vordergrund. Ein fortlebendes Andenken in einer begrenzten Fachöffentlichkeit (das bei allen Persönlichkeiten, deren Grabstätte als Ehrengrabstätte anerkannt worden ist, ohnehin vorauszusetzen ist) ist, anders als in der Vergangenheit, also nicht mehr ausschlaggebend.

Bei der Prüfung einer ausnahmsweisen Verlängerung der Anerkennung um weitere 20 Jahre liegt der Schwerpunkt nicht so sehr auf Verdiensten, sondern gleichfalls auf dem fortlebenden Andenken

Anschrift für Fracht, Einschreiben, Eilboten:
Der Regierende Bürgermeister, Senatskanzlei, 10178 Berlin

Verkehrsverbindungen:
U- und S-Bahn Alexanderplatz,
Regionalbahn, Tram M 2, M 5, M 6
Bus M 48, 100, 200, 248, TXL

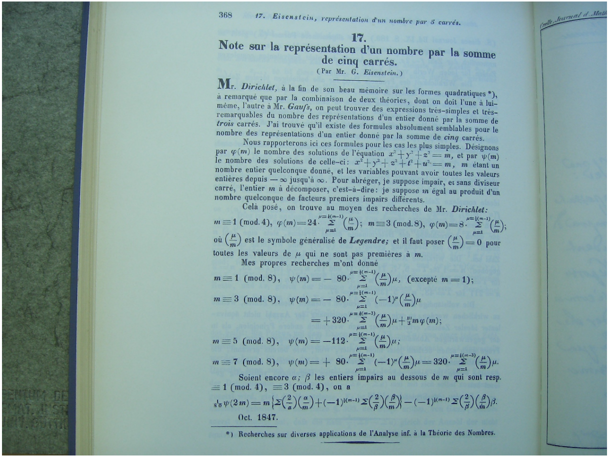
Besuchszeiten der Bürgerberatung:
Mo/Di/Fr 9.00 - 12.00 Uhr
Do 16.00 - 18.00 Uhr

Sprechzeiten telefonisch:
Mo-Mi 9.00 - 15.00 Uhr
Do 9.00 - 18.00 Uhr
Fr 9.00 - 14.00 Uhr


HERMANN MINKOWSKI
MATHEMATIKER
1902 – 1909

Quadratic forms

$$\psi(m) := \{(x,y,z,t,w) \in \mathbb{Z}^5 \mid x^2+y^2+z^2+t^2+w^2 = m\} = \dots$$



17.
Note sur la représentation d'un nombre par la somme de cinq carrés.

(Par Mr. G. *Eisenstein.*)

Mr. *Dirichlet*, à la fin de son beau mémoire sur les formes quadratiques *), à remarqué que par la combinaison de deux théories, dont on doit l'une à lui-même, l'autre à Mr. *Gaufs*, on peut trouver des expressions très-simples et très-remarquables du nombre des représentations d'un entier donné par la somme de *trois* carrés. J'ai trouvé qu'il existe des formules absolument semblables pour le nombre des représentations d'un entier donné par la somme de *cinq* carrés.

Nous rapporterons ici ces formules pour les cas les plus simples. Désignons par $\varphi(m)$ le nombre des solutions de l'équation $x^2+y^2+z^2=m$, et par $\psi(m)$ le nombre des solutions de celle-ci: $x^2+y^2+z^2+t^2+u^2=m$, m étant un nombre entier quelconque donné, et les variables pouvant avoir toutes les valeurs entières depuis $-\infty$ jusqu'à ∞. Pour abréger, je suppose impair, et sans diviseur carré, l'entier m à décomposer, c'est-à-dire: je suppose m égal au produit d'un nombre quelconque de facteurs premiers impairs différents.

Celà posé, on trouve au moyen des recherches de Mr. *Dirichlet:*

$$m \equiv 1 \pmod{4},\ \varphi(m) = 24 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{\mu}{m}\right);\quad m \equiv 3 \pmod{8},\ \varphi(m) = 8 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{\mu}{m}\right);$$

où $\left(\frac{\mu}{m}\right)$ est le symbole généralisé de *Legendre;* et il faut poser $\left(\frac{\mu}{m}\right)=0$ pour toutes les valeurs de μ qui ne sont pas premières à m.

Mes propres recherches m'ont donné

$$m \equiv 1 \pmod{8},\quad \psi(m) = -\ 80 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu,\ \text{(excepté } m=1);$$

$$m \equiv 3 \pmod{8},\quad \psi(m) = -\ 80 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)} (-1)^{\mu} \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu$$

$$= +320 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{4}(m-3)} \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu + \tfrac{10}{3} m\,\varphi(m);$$

$$m \equiv 5 \pmod{8},\quad \psi(m) = -112 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu;$$

$$m \equiv 7 \pmod{8},\quad \psi(m) = +\ 80 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{2}(m-1)} (-1)^{\mu} \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu = 320 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{1}{4}(m-3)} \left(\frac{\mu}{m}\right)\mu.$$

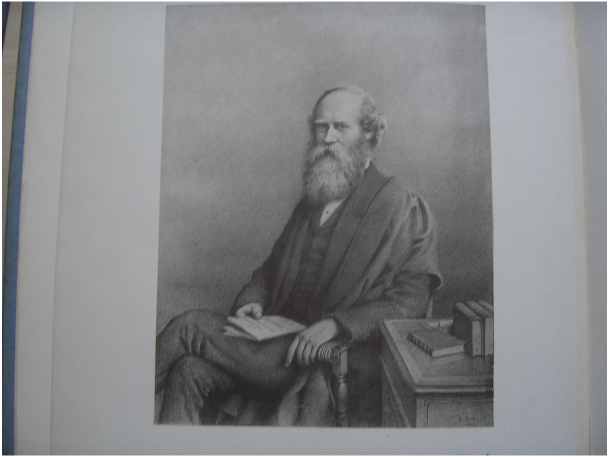
Soient encore α; β les entiers impairs au dessous de m qui sont resp. $\equiv 1 \pmod{4}$, $\equiv 3 \pmod{4}$, on a

$$\tfrac{1}{80}\psi(2m) = m\left\{\Sigma\left(\frac{2}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{m}\right) + (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \Sigma\left(\frac{2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{m}\right)\right\} - (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)} \Sigma\left(\frac{2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{m}\right)\beta.$$

Oct. 1847.

*) Recherches sur diverses applications de l'Analyse inf. à la Théorie des Nombres.

Henry John Stephen Smith, 1826 - 1883



Half as master, half as servant

promoted the well-doing of his pupils, and what his views were about the reforms desirable in mathematical teaching.

The present volumes show what splendid contributions Henry Smith made to science during the short twenty-nine years of his speculative activity. Nevertheless, it must, I think, be admitted that his unrivalled powers were often employed upon work that scores of able men might have been found to do efficiently, and which his friends should not have asked him nor he have consented to undertake. From 1850 to 1870 he was Lecturer at Balliol, not being able to afford to give up his Fellowship, and having scruples about retaining it if he did not teach, as the number of Fellowships was limited and the stipend of a Lecturer was too small by itself to remunerate any one for the work. It must be borne in mind that during part of this time he was also Savilian Professor, and during the whole of it he was constantly doing other College and University work*, assisting backward men, or taking part in examinations, or serving on University Boards and Committees. In 1873 he freed himself from the worst of this drudgery, the College Lectureship, by accepting a flattering and generous offer from Corpus Christi College of a Fellowship upon that foundation†. Not long afterwards he obtained the Keepership of the University Museum, left vacant by the death of Professor Phillips. The office gave him a pleasant house, a small stipend, and not very uncongenial duties, half as master, half as servant,

* The Master and Fellows of Balliol College, for instance, once asked him to give a course of lectures on the Schoolmen; and he complied.

† A friend at Balliol writes :—‘We knew perhaps better than others how necessary this relief was to Henry Smith, and we rejoiced that it had ...

Avoiding pain

cause and the men he assailed. Henry Smith's tenderness of feeling interfered with his command of literary form. He had a feminine instinct for avoiding whatever would give pain, and never allowed his buoyant spirits to betray him into a word that might seem harsh, or his inimitable persiflage to pass the boundary line into sarcasm. Those who heard him talk were conscious of wit that played round every subject with a perpetual sparkle, and that left a delicate aroma behind; but no one ever knew it employed as a weapon of offence. Reading over his private letters I find the same kindliness, the nearest approach to personal satire being perhaps the description of a heavy dinner, 'with four pièces de résistance, not including X and Z,' two rather overwhelming talkers. Therefore if Henry Smith had ever written on any of the subjects on which he felt strongly—and he was an ardent Liberal on every University question and on almost every political topic of interest—I cannot doubt that he would have adopted a style of earnest simplicity, and would have trusted for effect to argument, enhanced at most by a restrained eloquence. Bearing in mind that he was confessedly one of the most brilliant talkers of his day, so that every obituary notice dwelt lingeringly upon this trait, and considering how easily the playful but keen humour might have been transformed into caustic satire, I can only wonder at the mixture of kindliness with strong self-discipline that prevented even an occasional lapse. Both in this matter and

Partly, he was himself to blame

which sate lightly upon one who was genial and full of instinctive tact. Nevertheless, it cannot be said that his work was sensibly lightened for any long time. Partly, he was himself to blame. He had a speculative element in his nature, and had invested so much money in mines—almost always, I am afraid, unremunerative—that it became important now and again to eke out his regular income. I remonstrated with him very strongly, when he added the duties of Mathematical Examiner at the University of London to his other heavy work (1870), for he seemed to be breaking down at the time he undertook it, and I felt sure that whatever he did for the day's need was so much taken from more enduring labours. It seemed however as if the world was in a conspiracy to force duties of every kind upon one whose talent was so flexible and whom men of all opinions agreed to welcome as a coadjutor. He was for years a member of the Royal Commission on Scientific Education, having been appointed in 1870, and he drafted a large portion of its report. In 1877 he became a member of the Oxford University Commission under Lord Salisbury's Act; and in the same year he agreed to be chairman of the new Meteorological Office, the governing body of which was practically nominated by the Royal Society. This latter work was specially congenial, and the associates were so considerate and able as to give a charm to toil; and Henry Smith enjoyed the fortnightly visit to London, and the temporary rest from the turmoil of Oxford business. Still, when all is said, it can hardly be doubted that the labours of all these various offices meant a partial interruption of nobler toil and may have hastened a premature death.

It may perhaps be said, and not without some truth, that those who knew of the condition of his health should have refrained from heaping work upon him and should even have compelled him to take a long term of real rest. But

Smith: "On the orders and genera..."

XVII.

ON THE ORDERS AND GENERA OF TERNARY QUADRATIC FORMS.

[Received February 21; Read February 27, 1867.]

1. EISENSTEIN, in a memoir entitled 'Neue Theoreme der höheren Arithmetik'*, has defined the ordinal and generic characters of ternary quadratic forms of an uneven determinant; and, in the case of definite forms, has assigned the weight of any given order or genus. But he has not considered forms of an even determinant, neither has he given any demonstrations of his results. To supply these omissions, and so far to complete the work of Eisenstein, is the object of the present memoir.

2. We represent by f the ternary quadratic form

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

we suppose that f is *primitive* (*i.e.* that the six integral numbers a, a', a'', b, b', b'' admit of no common divisor other than unity), and that its discriminant is different from zero; this discriminant, or the determinant of the matrix

$$\begin{vmatrix} a, & b'', & b' \\ b'', & a', & b \\ b', & b, & a'' \end{vmatrix}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

we represent by D; by Ω we denote the greatest common divisor of the minor determinants of the matrix (2); by ΩF the contravariant of f, or the form

A little annoyed

position of a number into five squares *. His feelings in the matter are shown by the following extracts from letters to myself. In the first, dated Oxford, February 17, 1882, he wrote—'The Paris Academy have set for their Grand Prix for this year the theory of the decomposition of numbers into five squares, referring to a note of Eisenstein, *Crelle*, vol. xxxv, in which he gives without demonstration the formulæ for the case in which the number to be decomposed has no square divisor. In the Royal Society's Proceedings, vol. xvi, pp. 207, 208, I have given the complete theorems, not only for five, but also for seven squares: and though I have not given my demonstrations, I have (in the paper beginning at p. 197) described the general theory from which these theorems are corollaries with some fulness of detail. Ought I to do anything in the matter? My first impression is that I ought to write to Hermite, and call his attention to it. A line or two of advice would really oblige me, as I am somewhat troubled and a little annoyèd;' and in the second, of date February 22, he proceeded, 'You see I take your advice entirely upon the point that he ought to be written to. The worst of it is that it would take me a year, and a hundred pages, to work out the demonstrations of the paper in the Royal Society's Proceedings.'

The following reply was received from M. Hermite:

MON CHER MONSIEUR,

Aucun des membres de la commission qui a proposé pour sujet du prix des sciences mathématiques en 1882 la démonstration des théorèmes d'Eisenstein sur la décomposition des nombres en cinq carrés n'avait connaissance de vos travaux contenant depuis bien

Hermite: "Mon cher Monsieur..."

... are corollaries with some fulness of detail. Ought I to do anything in the matter? My first impression is that I ought to write to Hermite, and call his attention to it. A line or two of advice would really oblige me, as I am somewhat troubled and a little annoyed;' and in the second, of date February 22, he proceeded, 'You see I take your advice entirely upon the point that he ought to be written to. The worst of it is that it would take me a year, and a hundred pages, to work out the demonstrations of the paper in the Royal Society's Proceedings.'

The following reply was received from M. Hermite:

MON CHER MONSIEUR,

Aucun des membres de la commission qui a proposé pour sujet du prix des sciences mathématiques en 1882 la démonstration des théorèmes d'Eisenstein sur la décomposition des nombres en cinq carrés n'avait connaissance de vos travaux contenant depuis bien des années cette démonstration et dont j'ai pour la première fois connaissance par votre lettre. L'embarras n'est point pour vous, mais pour le rapporteur des mémoires envoyés au concours, et si j'étais ce rapporteur je n'hésiterais pas un moment à faire d'abord l'aveu complet de l'ignorance où il s'est trouvé de vos publications, et ensuite à proclamer hautement que vous aviez donné la solution de la question proposée. Une circonstance pourrait ôter tout embarras et rendre sa tâche facile autant qu'agréable. S'il avait en effet à rendre compte d'un mémoire adressé par vous-même dans lequel vous rappelleriez vos anciennes recherches en les complétant, vous voyez que justice vous serait rendue en même temps que les intentions de l'Académie

---

* The subject of the prize for 1882 had also been announced a year previously, but the notice had then escaped his attention. The following are the terms of the announcement:

Grand Prix des Sciences Mathématiques. (Prix du Budget.) Question proposée pour l'année 1882. L'Académie propose pour sujet du prix la *Théorie de la décomposition des nombres entiers en une somme de cinq carrés*, en appelant particulièrement l'attention des concurrents sur les résultats extrêmement remarquables énoncés sans démonstration par Eisenstein dans une Note écrite en langue

Hermite: “mes sentiments bien sincérement dévoués...”

seraient remplies puisqu'on lui annoncerait la solution complète de la question proposée. Jusqu'ici je n'ai pas eu connaissance qu'aucune pièce ait été envoyée, ce qui s'explique par la direction du courant mathématique qui ne se porte plus maintenant vers l'arithmétique. Vous êtes seul en Angleterre à marcher dans la voie ouverte par Eisenstein. M. Kronecker est seul en Allemagne; et chez nous M. Poincaré, qui a jeté en avant quelques idées heureuses sur ce qu'il appelle les invariants arithmétiques, semble maintenant ne plus songer qu'aux fonctions Fuchsiennes et aux équations différentielles. Vous jugerez s'il vous convient de répondre à l'appel de l'Académie à ceux qui aiment l'Arithmétique; en tout cas soyez assuré que la commission aura par moi connaissance de vos travaux si elle a se prononcer et à faire un rapport à l'Académie sur des mémoires soumis à son examen . . . Je vous renouvelle, mon cher Monsieur, l'expression de ma plus haute estime et de mes sentiments bien sincèrement dévoués.

CH. HERMITE.

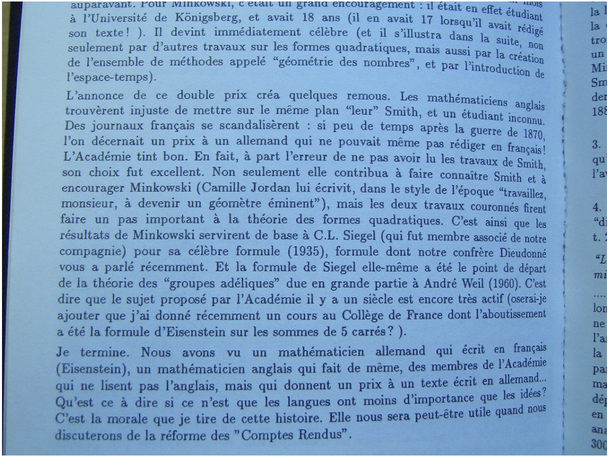
PARIS, 26 Février, 1882.

In consequence of an accident when riding, Professor Smith had been confined to his sofa for some weeks; but, as far as his strength permitted, he had been working steadily at subjects connected with the memoir on the Theta and Omega subjects, which he was very reluctant to lay aside. Nevertheless, he thought it his duty to accede to the suggestion of M. Her-

Hermite" "oubli, ..., absolument involontaire..."

given the corresponding formulæ for seven squares, more than fifteen years before: in fact, the report shows that the writer regarded Professor Smith's memoir as perfectly new work called into existence by the prize competition. Under these circumstances Miss Smith, as the representative of her brother, wrote to M. Hermite recalling his attention to the expression in his letter of February 26, 1882, 'En tout cas soyez assuré que la commission aura par moi connaissance de vos travaux si elle a se prononcer et à faire un rapport à l'Académie sur des mémoires soumis à son examen,' and expressing the hope that he would give the explanation that had become necessary. M. Hermite replied that the omission of which she complained was an error which was due to absolutely involuntary forgetfulness ('ce tort ne consiste que dans un oubli, qui a été absolument involontaire'); but he made no further statement of any kind. The award of the prize gave rise however to a good deal of comment in the Paris newspapers. The Academy was blamed for having been unaware of work published by the Royal Society in 1868, and it was pointed out that the award was necessarily unsatisfactory, in spite of Professor Smith himself having sent in a memoir, as any other competitor might have availed himself of the indications contained in his published writings. The striking identity between the first and third memoirs, which is emphasized in the report, gave rise to the statement, which appeared in the newspapers, that this had actually taken place. In consequence of these criticisms M. Bertrand made certain explanations at the meeting of the Academy on April 16, 1883. The proceedings commenced with the reading of an appreciative obituary notice of Professor Smith by M. Camille Jordan, in which special reference was made to his arithmetical researches. The account then proceeds:

Jean-Pierre Serre



auparavant. Pour Minkowski, c'était un grand encouragement : il était en effet étudiant à l'Université de Königsberg, et avait 18 ans (il en avait 17 lorsqu'il avait rédigé son texte !). Il devint immédiatement célèbre (et il s'illustra dans la suite, non seulement par d'autres travaux sur les formes quadratiques, mais aussi par la création de l'ensemble de méthodes appelé "géométrie des nombres", et par l'introduction de l'espace-temps).

L'annonce de ce double prix créa quelques remous. Les mathématiciens anglais trouvèrent injuste de mettre sur le même plan "leur" Smith, et un étudiant inconnu. Des journaux français se scandalisèrent : si peu de temps après la guerre de 1870, l'on décernait un prix à un allemand qui ne pouvait même pas rédiger en français! L'Académie tint bon. En fait, à part l'erreur de ne pas avoir lu les travaux de Smith, son choix fut excellent. Non seulement elle contribua à faire connaître Smith et à encourager Minkowski (Camille Jordan lui écrivit, dans le style de l'époque "travaillez, monsieur, à devenir un géomètre éminent"), mais les deux travaux couronnés firent faire un pas important à la théorie des formes quadratiques. C'est ainsi que les résultats de Minkowski servirent de base à C.L. Siegel (qui fut membre associé de notre compagnie) pour sa célèbre formule (1935), formule dont notre confrère Dieudonné vous a parlé récemment. Et la formule de Siegel elle-même a été le point de départ de la théorie des "groupes adéliques" due en grande partie à André Weil (1960). C'est dire que le sujet proposé par l'Académie il y a un siècle est encore très actif (oserai-je ajouter que j'ai donné récemment un cours au Collège de France dont l'aboutissement a été la formule d'Eisenstein sur les sommes de 5 carrés?).

Je termine. Nous avons vu un mathématicien allemand qui écrit en français (Eisenstein), un mathématicien anglais qui fait de même, des membres de l'Académie qui ne lisent pas l'anglais, mais qui donnent un prix à un texte écrit en allemand... Qu'est ce à dire si ce n'est que les langues ont moins d'importance que les idées? C'est la morale que je tire de cette histoire. Elle nous sera peut-être utile quand nous discuterons de la réforme des "Comptes Rendus".

Letters

Teaching - Bonn 1893

und Anwendungen der elliptischen Functionen sind
auch nicht allzustark besucht. Ich habe aber recht
verständige Zuhörer, ich glaube, zwei oder sogar drei von ihnen
denken eines Tages Concurrenten zu werden.

Nach Graz werde ich mit Anfang August kommen.
Es ist nur schade, dass ich so bald wieder zurück müsste
wenn ich nach München wollte.

Mit besten Grüssen an Dich und Deine Frau

Dein H. Minkowski

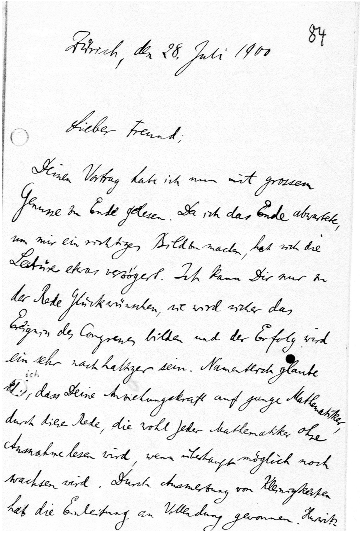
Colleagues - Bonn 1893

werde alle Hebel in Bewegung setzen, um von der Uebung loszukommen. In der Regel aber wird die Antwort erst am Morgen des Einberufungstages an Ort und Stelle ertheilt; ausserdem werden die Leute, weil jetzt das Kaisermanöver hier sein soll, ganz besondere Schwierigkeiten machen. Wenn ich diesen Schicksalsschlag noch hätte ahnen können, wäre ich sicherlich schon seit einer Woche in Königsberg; so könnte ich jetzt gerade nur für 14 Tage dorthin.

Wenn ich in Deine Stelle in Königsberg würde einrücken können, würde ich es, glaube ich, aus vielen Gründen als ein besonderes Glück zu betrachten haben. Der Umgang hier mit meinen mathematischen Kollegen ist wirklich bejammernswerth; der eine klagt über Migräne, so wie man a oder x sagt; bei dem

Zuhörer
der Mechanik habe ich ca. 14. Doch da darunter
die überwiegende Mehrzahl Praktiker sind, so
muss ich sorgen, nicht zu mathematisch zu werden,
und lese daher so ein Zwischending zwischen mathematischer
und praktischer Mechanik, vielleicht gar noch
mehr praktisch als Klein wohl sein mag. In der
Functionentheorie habe ich alle höheren Semester, die
(dieses ist ein Gedankenstrich, nicht ein Minuszeichen)
von Mathematikern da sind, nämlich – 4, tout comme
chez nous. Doch sind in der mathematischen Abtheilung
dieses Mal zehn neue hinzugekommen, und da ist
wohl für die nächsten Semester auf grössere
Zuhörerzahlen Aussicht. Hier in Zürich selbst
ist es natürlich wunderschön. Augenblicklich
freilich ist viel Nebel da; bei Sonnenschein
aber kann man noch jetzt grossartige Spaziergänge
machen. Mit Hurwitz bin ich selbstverständlich
sehr viel zusammen. Er wartet noch sehnsüchtig auf

Du unter Umständen erreichen, dass man von
Deiner Rede noch nach Jahrzehnten spricht.
Doch ist das Prophezeihen natürlich eine schwierige
Sache. Du wirst Dich vielleicht auch scheuen,
manche Ideen, die Du Dir gemacht hast, über die
künftige Behandlung von Problemen preiszugeben. Themata
mehr philosophischer Natur sind vielleicht besser für
ein deutsches Publikum, als das internationale geeignet.
Einen Rückblick und Ausblick wird wahrscheinlich auch ein
französischer Mathematiker geben, der wohl als der
erste zu Worte kommen wird. Darüber solltest Du
Dich irgendwie vergewissern. Da es doch Fachleute
Faktoren
sind, vor denen man spricht, finde ich eine Rede wie
die Hurwitzsche, die damals auch sehr gut gefiel,
mit bestimmten Thatsachen besser am Platze als eine
blosse Causerie, wie es die Poincarésche ist. Von Reden,



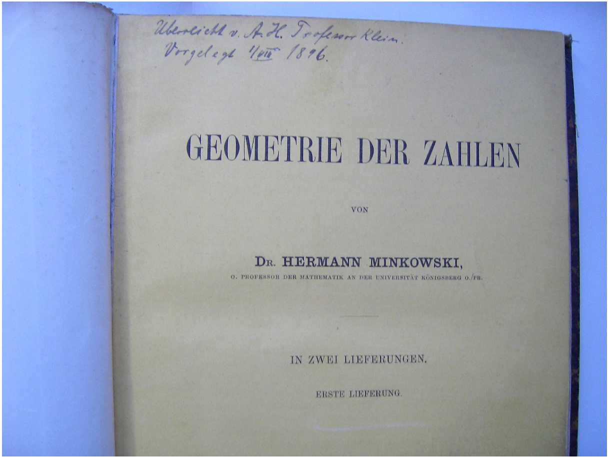
84

Zürich, den 28. Juli 1900

Lieber Freund;

Deinen Vortrag habe ich nun mit grossem Genusse zu Ende gelesen. Da ich das Ende abwartete, um mir ein richtiges Bild zu machen, hat sich die Lectüre etwas verzögert. Ich kann Dir nur zu der Rede Glück wünschen, sie wird sicher das Ereigniss des Congresses bilden und der Erfolg wird ein sehr nachhaltiger sein. Namentlich glaube ich, dass Deine Anziehungskraft auf junge Mathematiker durch diese Rede, die wohl jeder Mathematiker ohne Ausnahme lesen wird, wenn überhaupt möglich noch wachsen wird. Durch Ausmerzung von Kleinigkeiten hat die Einleitung an Vollendung gewonnen. [illegible]

Mathematics


Überreicht v. A. H. Professor Klein.
Vorgelegt 1/VIII 1896.
GEOMETRIE DER ZAHLEN
VON
DR. HERMANN MINKOWSKI,
O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT KÖNIGSBERG O./PR.
IN ZWEI LIEFERUNGEN.
ERSTE LIEFERUNG.

Sums of squares

Count integer solutions of

$$x^2 + y^2 + z^2 = c, \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + w^2 = c.$$

Count integer solutions of

$$x^2 + y^2 + z^2 = c, \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + w^2 = c.$$

This leads to geometric considerations in Minkowski space.

Minkowski and his space (Sept. 1908)

M.H. Gentlemen! The views of space and time which I want to present to you arose from the domain of experimental physics, and therein lies their strength. Their tendency is radical. From now onwards space by itself and time by itself will recede completely to become mere shadows and only a type of union of the two will still stand independently on its own.

Minkowski and his space (Sept. 1908)

M.H. Gentlemen! The views of space and time which I want to present to you arose from the domain of experimental physics, and therein lies their strength. Their tendency is radical. From now onwards space by itself and time by itself will recede completely to become mere shadows and only a type of union of the two will still stand independently on its own.

... While developing mathematical consequences, one will find sufficient hints of experimental confirmations of the postulate, to reconcile even those who find it uncongenial, or even painful, to give up the old, time-honoured concepts, to the new ideas of time and space, by the prospect of a pre-existing (prästabilierte) harmony between pure mathematics and physics.

Sums of three cubes

Not all $c \in \mathbb{N}$ are sums of three integer cubes

$$x^3 + y^3 + z^3 = c,$$

a necessary condition is that $c \neq \pm 4 \pmod 9$.

Sums of three cubes

Not all $c \in \mathbb{N}$ are sums of three integer cubes

$$x^3 + y^3 + z^3 = c,$$

a necessary condition is that $c \neq \pm 4 \pmod 9$. Until 2019, it was unknown whether or not 42 can be represented as such a sum.

Sums of three cubes

Not all $c \in \mathbb{N}$ are sums of three integer cubes

$$x^3 + y^3 + z^3 = c,$$

a necessary condition is that $c \neq \pm 4 \pmod 9$. Until 2019, it was unknown whether or not 42 can be represented as such a sum.

Booker and Sutherland, using 1.3M hours of computing on the Charity Engine global grid, found the smallest solution:

$$(-80\,538\,738\,812\,075\,974)^3 + 80\,435\,758\,145\,817\,515^3 + 12\,602\,123\,297\,335\,631^3 = 42.$$

Sums of three cubes

Not all $c \in \mathbb{N}$ are sums of three integer cubes

$$x^3 + y^3 + z^3 = c,$$

a necessary condition is that $c \neq \pm 4 \pmod 9$. Until 2019, it was unknown whether or not 42 can be represented as such a sum.

Booker and Sutherland, using 1.3M hours of computing on the Charity Engine global grid, found the smallest solution:

$$(-80\,538\,738\,812\,075\,974)^3 + 80\,435\,758\,145\,817\,515^3 + 12\,602\,123\,297\,335\,631^3 = 42.$$

There is a conjecture that there should be infinitely many solutions!

Theorem (Hassett-T. 2001)

Equations of this type (log-K3 surfaces) have infinitely many solutions, after passage to a finite extension of $\mathbb{Z}$.

Theorem (Hassett-T. 2001)

Equations of this type (log-K3 surfaces) have infinitely many solutions, after passage to a finite extension of $\mathbb{Z}$. Moreover, solutions are dense.

Theorem (V. Wang 2021)

Assuming the Riemann hypothesis (and other conjectures), 100% of integers $c \neq \pm 4 \pmod 9$ are representable as a sum of three integer cubes.

Minkowski-Hasse Principle: A form $f \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$ of degree 2 has nontrivial zeroes in $\mathbb{Q}$ if and only if it has nontrivial zeroes in all completions of $\mathbb{Q}$ (i.e., in $\mathbb{R}$ and all $\mathbb{Q}_p$).

Minkowski-Hasse Principle: A form $f \in \mathbb{Q}[x_0, \ldots, x_n]$ of degree 2 has nontrivial zeroes in $\mathbb{Q}$ if and only if it has nontrivial zeroes in all completions of $\mathbb{Q}$ (i.e., in $\mathbb{R}$ and all $\mathbb{Q}_p$).

What about integral points? Examples in work of Colliot-Thélène–Xu (2009).

How about forms of degree ≥ 3? Counterexamples

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0, \qquad x^3 + 4y^3 + 10z^3 + 25t^3 = 0,$$

$$w^2 = -25x^4 - 5y^4 + 45z^4.$$

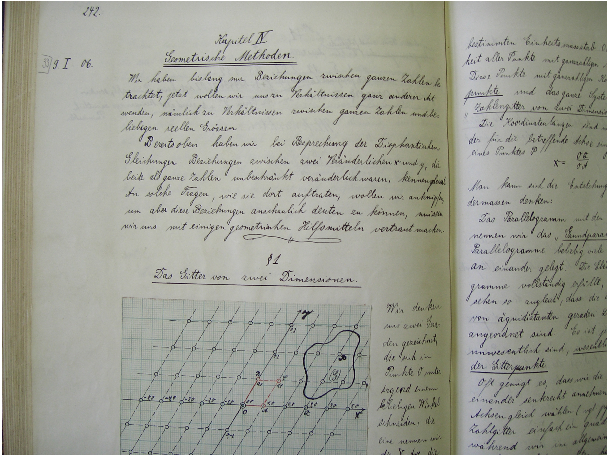
How about forms of degree ≥ 3? Counterexamples

$$3x^3 + 4y^3 + 5z^3 = 0, \qquad x^3 + 4y^3 + 10z^3 + 25t^3 = 0,$$

$$w^2 = -25x^4 - 5y^4 + 45z^4.$$

Many of these (but not all!) are explained by the Brauer-Manin obstruction, extensively studied by Colliot-Thélène and his students, by Skorobogatov, Poonen, ...

Lattices


242.

33/ 9 I. 06.

Kapitel IV.

Geometrische Methoden.

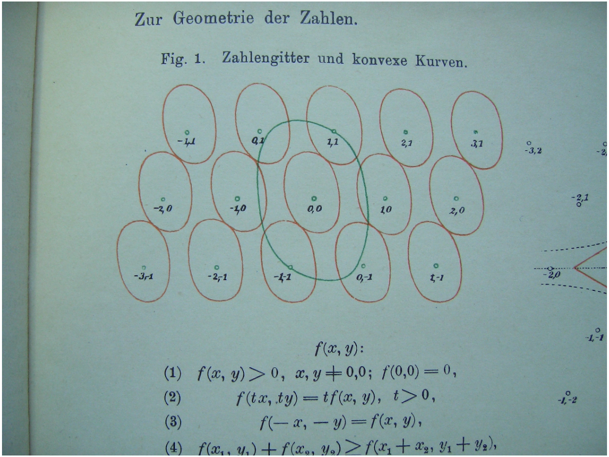
Wir haben bislang nur Beziehungen zwischen ganzen Zahlen betrachtet, jetzt wollen wir uns zu Verhältnissen ganz anderer Art wenden, nämlich zu Verhältnissen zwischen ganzen Zahlen und beliebigen reellen Grössen.

Bereits oben haben wir bei Besprechung der Diophantischen Gleichungen Beziehungen zwischen zwei Veränderlichen x und y, die beide als ganze Zahlen unbeschränkt veränderlich waren, kennengelernt. An solche Fragen, wie sie dort auftraten, wollen wir anknüpfen; um aber diese Beziehungen anschaulich deuten zu können, müssen wir uns mit einigen geometrischen Hilfsmitteln vertraut machen.

§1

Das Gitter von zwei Dimensionen.

Wir denken uns zwei Geraden gezeichnet, die sich im Punkte O unter irgend einem beliebigen Winkel schneiden; die eine nennen wir die X-Axe, die



Zur Geometrie der Zahlen.

Fig. 1. Zahlengitter und konvexe Kurven.

$f(x, y)$:

(1) $f(x, y) > 0, \quad x, y \neq 0{,}0; \quad f(0{,}0) = 0,$

(2) $f(tx, ty) = t f(x, y), \quad t > 0,$

(3) $f(-x, -y) = f(x, y),$

(4) $f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) \geq f(x_1 + x_2, y_1 + y_2),$

Lattice point theorem

Let $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ be a lattice of covolume $= 1$. Let $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ be a *convex*, *symmetric* domain of area > 4. Then

$$|\mathcal{D} \cap \Lambda| \geq 2.$$

Number theory

- $F/\mathbb{Q}$ - number field: $F = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q} \oplus \alpha\mathbb{Q} \oplus \ldots \oplus \alpha^{d-1}\mathbb{Q}$

$$\alpha^d + a_{d-1}\alpha^{d-1} + \ldots + a_0 = 0, \;\; a_j \in \mathbb{Q},$$

- $\mathcal{O}_F \subset F$ - ring of integers

$$\beta \in \mathcal{O}_F \Leftrightarrow \beta^d + b_{d-1}\beta^{d-1} + \ldots + b_0 = 0, \;\; b_j \in \mathbb{Z} \;\; (*)$$

Number theory

- $F/\mathbb{Q}$ - number field: $F = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q} \oplus \alpha\mathbb{Q} \oplus \ldots \oplus \alpha^{d-1}\mathbb{Q}$

$$\alpha^d + a_{d-1}\alpha^{d-1} + \ldots + a_0 = 0, \;\; a_j \in \mathbb{Q},$$

- $\mathcal{O}_F \subset F$ - ring of integers

$$\beta \in \mathcal{O}_F \Leftrightarrow \beta^d + b_{d-1}\beta^{d-1} + \ldots + b_0 = 0, \;\; b_j \in \mathbb{Z} \;\; (*)$$

- Discriminant $\mathfrak{d}(F) := \prod_{i<j}(\beta_i - \beta_j)^2$, where $\beta_1 = \beta$ and β_j are the other roots of $(*)$, *provided* $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}[\beta]$

- $F/\mathbb{Q}$ - number field: $F = \mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{Q} \oplus \alpha\mathbb{Q} \oplus \ldots \oplus \alpha^{d-1}\mathbb{Q}$

$$\alpha^d + a_{d-1}\alpha^{d-1} + \ldots + a_0 = 0, \ \ a_j \in \mathbb{Q},$$

- $\mathcal{O}_F \subset F$ - ring of integers

$$\beta \in \mathcal{O}_F \Leftrightarrow \beta^d + b_{d-1}\beta^{d-1} + \ldots + b_0 = 0, \ \ b_j \in \mathbb{Z} \ \ (*)$$

- Discriminant $\mathfrak{d}(F) := \prod_{i<j}(\beta_i - \beta_j)^2$, where $\beta_1 = \beta$ and β_j are the other roots of $(*)$, *provided* $\mathcal{O}_F = \mathbb{Z}[\beta]$
- Lattice point theorem $\Rightarrow$ *There are no* $F/\mathbb{Q}$ *with* $\mathfrak{d}(F) = 1$.
- Example $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$, $F = \mathbb{Q}(\alpha)$; then $\mathfrak{d}(F) = -4p^3 - 27q^2 = 1$ has no solutions with $p, q \in \mathbb{Z}$.

Conjecture:

$$\#\{[F:\mathbb{Q}] = d \mid |\mathfrak{d}(F)| \leq B\} \sim C_d \cdot B, \quad B \to \infty$$

Conjecture:

$$\#\{[F:\mathbb{Q}] = d \mid |\mathfrak{d}(F)| \leq B\} \sim C_d \cdot B, \quad B \to \infty$$

- $d = 3$ Davenport-Heilbronn (1971)

Conjecture:

$$\#\{[F:\mathbb{Q}]=d \mid |\mathfrak{d}(F)| \leq B\} \sim C_d \cdot B, \quad B \to \infty$$

- $d = 3$ Davenport-Heilbronn (1971)
- $d = 4, 5$ Bhargava (2001)

Discriminants

Conjecture:

$$\#\{[F:\mathbb{Q}] = d \mid |\mathfrak{d}(F)| \leq B\} \sim C_d \cdot B, \quad B \to \infty$$

- $d = 3$ Davenport-Heilbronn (1971)
- $d = 4, 5$ Bhargava (2001)
- $\ll B^{exp(C\sqrt{\log d})}$ Ellenberg-Venkatesh (2006)

Discriminants

Conjecture:

$$\#\{[F:\mathbb{Q}] = d \mid |\mathfrak{d}(F)| \leq B\} \sim C_d \cdot B, \quad B \to \infty$$

- $d = 3$ Davenport-Heilbronn (1971)
- $d = 4, 5$ Bhargava (2001)
- $\ll B^{exp(C\sqrt{\log d})}$ Ellenberg-Venkatesh (2006)
- $\ll B^{c \log(d)^2}$ Lemke Oliver-Thorne (2022)

Discriminants

Conjecture:

$$\#\{[F:\mathbb{Q}] = d \mid |\mathfrak{d}(F)| \leq B\} \sim C_d \cdot B, \quad B \to \infty$$

- $d = 3$ Davenport-Heilbronn (1971)
- $d = 4, 5$ Bhargava (2001)
- $\ll B^{exp(C\sqrt{\log d})}$ Ellenberg-Venkatesh (2006)
- $\ll B^{c\log(d)^2}$ Lemke Oliver-Thorne (2022)
- Fixing the Galois group $\Rightarrow$ Malle's conjecture, active and growing area of arithmetic statistics

Sphere packings

XIX.

Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper.

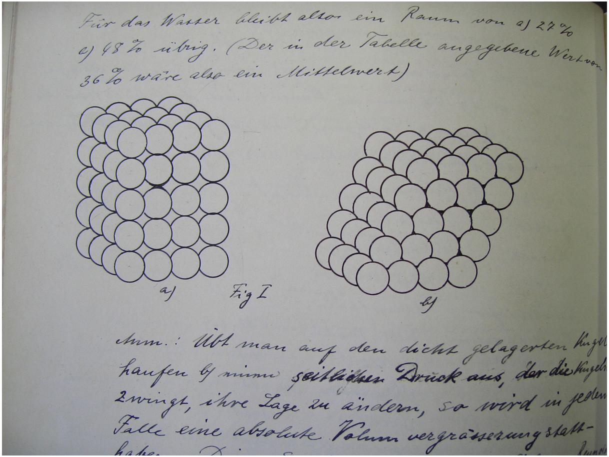
(Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. 1904. S. 311—355.)

(Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Juni 1904.)

Wir beschäftigen uns hier mit folgendem Probleme: *Gegeben ist ein beliebiger Grundkörper K. Lauter mit K kongruente und parallel orientierte Körper in unendlicher Anzahl sollen im Raume in gitterförmiger Anordnung derart gelagert werden, daß keine zwei der Körper ineinander eindringen und daß dabei der von den Körpern erfüllte Teil des Raumes gegenüber dem von ihnen freigelassenen möglichst groß ist.*

Unter einer *gitterförmigen Anordnung* der Körper verstehen wir, daß entsprechende Punkte in ihnen ein parallelepipedisches Punktsystem (Gitter) bilden. Wir beschränken die Untersuchung auf konvexe Körper.

Die Lösung dieses Problems gestattet interessante Anwendungen in der Zahlenlehre und ist auch für die Theorie von der Struktur der Kristalle von Bedeutung*). Aus der Kenntnis der dichtesten Lagerung von *Kugeln* folgen (§ 7) fast unmittelbar alle Tatsachen der Gauß-Dirichletschen Theorie der Parallelgitter (d. s. die Sätze über die arithmetische Reduktion der positiven ternären quadratischen Formen). Die dichteste Lagerung von *Oktaedern* (§ 9) gibt Aufschlüsse über die simultane Approximation zweier Größen durch rationale Zahlen mit gleichem Nenner. Die hier abgeleiteten allgemeinen Theoreme über gewisse Ungleichungen (§ 5) endlich bilden in ihrer Anwendung auf Parallelepipede und Oktaeder, bzw. auf Kreiszylinder und Doppelkegel die Grundlage für die zweckmäßigsten Algorithmen zur Ermittlung der Fundamentaleinheiten in den kubischen


Für das Wasser bleibt also ein Raum von a) 27%
c) 48% übrig. (Der in der Tabelle angegebene Wert von
36% wäre also ein Mittelwert)

a) Fig I b)

Anm.: Übt man auf den dicht gelagerten Kugel-
haufen b) einen seitlichen Druck aus, der die Kugeln
zwingt, ihre Lage zu ändern, so wird in jedem
Falle eine absolute Volumvergrösserung statt-
haben.

Sphere Packings in 3 Dimensions

Thomas C. Hales

May 19, 2002

The Kepler conjecture asserts that no packing of equal balls in three dimensions can have density exceeding that of the face-centered cubic packing. The density of this packing is $\pi/\sqrt{18}$, or about 0.74048.

This conjecture was proved in 1998 [H]. In superficial terms, the proof takes over 270 pages of mathematical text, extensive computer resources, including 3 gigabytes of data, well over 40 thousand lines of code, about 10^5 linear programs each involving perhaps 200 variables and 1000 constraints. The project spanned nearly a decade of research, including substantial contributions from S. Ferguson [F]. This is not a *proof from the book*, in the sense of Erdös.

This lecture[1] proposes a second-generation proof of the Kepler conjecture, and describes the current status of that second-generation proof. Much of the inspiration for the revised proof comes from the subject of *generative programming*, and the lecture gives a brief description of that topic as well.

There are various motivations for a second-generation proof. One is that a simple is more likely to be used as a model for other proofs in discrete geometry. One might try to build a proof of the kissing number problem in 4 dimensions, or a proof of the Kelvin problem (of finding the optimal partition of Euclidean 3-space into equal volumes) by similar methods. Such an approach is appealing only if the methods can be further simplified.

This lecture is primarily concerned with packings in three dimensions. But it should be pointed out that excellent progress in higher dimensions has been made in recent work of H. Cohn and N. Elkies. They have produced the best known bounds on densities of packings in dimensions 4-36, and they conjecture that their methods will lead to sharp bounds in dimensions 8 and 24 (corresponding to the E_8 and Leech lattices respectively) [CE].

Two common decompositions of space are the Voronoi decomposition and the Delaunay decomposition. These two decompositions lead to bounds of 0.755 and 0.740873, respectively (the second bound is not rigorous, being based merely on numerical evidence) [M]. In the 1998 proof of the Kepler conjecture, Euclidean space was partitioned according to

[1] This article is based on an Arbeitstagung lecture in Bonn on June 14, 2001.

Tom Hales

Abstract: In 1998, Sam Ferguson and Tom Hales announced the proof of a 400-year-old conjecture made by Kepler. The Kepler conjecture asserts that the most efficient arrangement of balls in space is the familiar pyramid arrangement used to stack oranges at markets.

Their mathematical proof relies heavily on long computer calculations. Checking this proof turned out to be a particular challenge for referees. The verification of the correctness of this single proof has now continued for more than 15 years and is still unfinished at the formal level. This long process has fortified standards of computer-assisted mathematical proofs.

Theorem (Maryna Viazovska 2016)

No packing of unit balls in $\mathbb{R}^8$ *has density greater than that of the* E_8*-lattice packing.*

Sphere packing in dimensions 8 and 24

Theorem (Maryna Viazovska 2016)

No packing of unit balls in $\mathbb{R}^8$ has density greater than that of the E_8-lattice packing.

Theorem (Cohn–Kumar–Miller–Radchenko–Viazovska 2016)

Same for dimension 24 (Leech lattice).

Sphere packing in dimensions 8 and 24

Theorem (Maryna Viazovska 2016)

No packing of unit balls in $\mathbb{R}^8$ has density greater than that of the E_8-lattice packing.

Theorem (Cohn–Kumar–Miller–Radchenko–Viazovska 2016)

Same for dimension 24 (Leech lattice).

In very high dimensions, it is still unknown whether or not a random packing is best.

XXII.

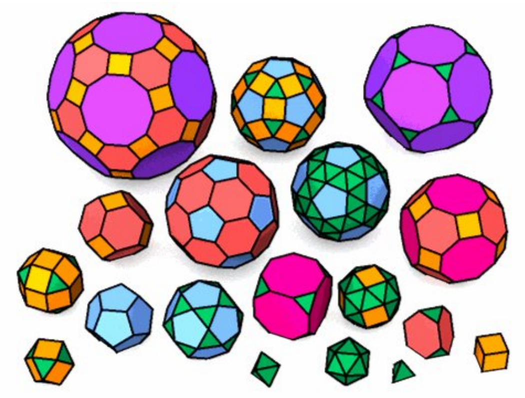
Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder.

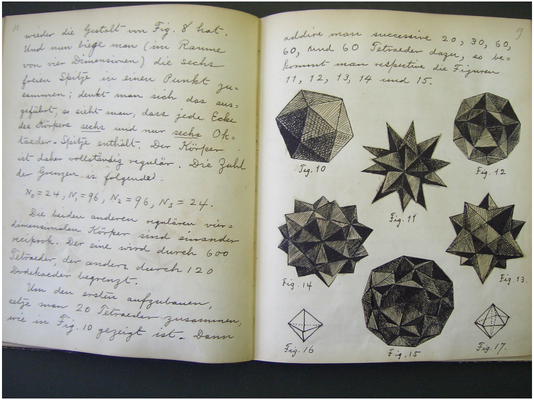
(Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Mathematisch-physikalische Klasse. 1897. S. 198—219.)
(Vorgelegt von David Hilbert in der Sitzung vom 31. Juli 1897.)

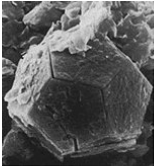
Ein *konvexer Körper* ist vollständig dadurch gekennzeichnet*), daß er eine abgeschlossene Punktmenge ist, innere Punkte besitzt, und daß jede gerade Linie, die innere Punkte von ihm aufnimmt, mit seiner Begrenzung stets zwei Punkte gemein hat (niemals mehr als zwei Punkte, falls auch die konvexen Körper, die sich ins Unendliche erstrecken, mit in Betracht gezogen werden). Infolge dieses einfachen Charakters spielen diese Gebilde eine gewisse Rolle bei der Behandlung einiger partieller Differentialgleichungen, die in der mathematischen Physik auftreten. Neuerdings habe ich in dem Buche „Geometrie der Zahlen" gezeigt, daß auch merkwürdige arithmetische Beziehungen sich an die konvexen Körper knüpfen. Einen besonderen Reiz bieten die Sätze über konvexe Körper noch durch den Umstand dar, daß sie in der Regel für diese ganze Kategorie von Gebilden ohne jede Ausnahme Geltung haben.

Der vorliegende Aufsatz entstand bei Gelegenheit von Versuchen, den folgenden Satz zu beweisen, den ich seit längerer Zeit vermutete und

Polytopes




58
wieder die Gestalt von Fig. 8 hat.
Und nun biege man (im Raume
von vier Dimensionen) die sechs
freien Spitze in einen Punkt zu=
sammen; denkt man sich das aus=
geführt, so sieht man, dass jede Ecke
des Körpers sechs und nur sechs Ok=
taeder-Spitze enthält. Der Körper
ist daher vollständig regulär. Die Zahl
der Grenzen is folgende.
N0 = 24, N1 = 96, N2 = 96, N3 = 24.
Die beiden anderen regulären vier=
dimensionalen Körper sind einander
reciprok. Der eine wird durch 600
Tetraeder, der anderz durch 120
Dodekaeder begrenzt.
Um den ersten aufzubauen,
setze man 20 Tetraeder zusammen,
wie in Fig. 10 gezeigt ist. Dann
59
addire man successive 20, 30, 60,
60, und 60 Tetraeder dazu, so be=
kommt man respective die Figuren
11, 12, 13, 14 und 15.
Fig. 10
Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 15
Fig. 16
Fig. 17.



Alge Braarudosphaera bigelowi – almost perfect dodecahedron (4000x magnification).

Given a lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ and a polytope Π with corners in Λ.

To determine: the number $\psi(n)$ of lattice points in $n \cdot \Pi \cap \Lambda$.

Polytopes and Lattice points

Given a lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ and a polytope Π with corners in Λ.

To determine: the number $\psi(n)$ of lattice points in $n \cdot \Pi \cap \Lambda$.

Solution:

- $(\Pi, \Lambda) \Rightarrow X_{\Pi,\Lambda}$ - is a toric variety $+$ a line bundle L

Given a lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ and a polytope Π with corners in Λ.

To determine: the number $\psi(n)$ of lattice points in $n \cdot \Pi \cap \Lambda$.

Solution:

- $(\Pi, \Lambda) \Rightarrow X_{\Pi,\Lambda}$ - is a toric variety $+$ a line bundle L
- $\psi(n) = \dim H^0(X_{\Pi,\Lambda}, nL)$ dimension of the space of global section of nL

Given a lattice $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ and a polytope Π with corners in Λ.

To determine: the number $\psi(n)$ of lattice points in $n \cdot \Pi \cap \Lambda$.

Solution:

- $(\Pi, \Lambda) \Rightarrow X_{\Pi,\Lambda}$ - is a toric variety $+$ a line bundle L
- $\psi(n) = \dim H^0(X_{\Pi,\Lambda}, nL)$ dimension of the space of global section of nL
- Riemann-Roch $\Rightarrow$ formula for $\psi(n)$, which depends only on *topological* invariants of $X_{\Pi,\Lambda}$

Combinatorial type: configuration of vertices, edges, faces, ...

Combinatorial type: configuration of vertices, edges, faces, ...

Steinitz (1922)

Every combinatorial type in dimensions ≤ 3 can be realized by rational polytopes, i.e., those with vertices in $\mathbb{Q}$.

Combinatorial type: configuration of vertices, edges, faces, ...

Steinitz (1922)

Every combinatorial type in dimensions ≤ 3 can be realized by rational polytopes, i.e., those with vertices in $\mathbb{Q}$.

Richter-Gebert (1994)

There exist 4-dimensional polytopes on 34 vertices that are not rational.

Combinatorial type: configuration of vertices, edges, faces, ...

Steinitz (1922)

Every combinatorial type in dimensions ≤ 3 can be realized by rational polytopes, i.e., those with vertices in $\mathbb{Q}$.

Richter-Gebert (1994)

There exist 4-dimensional polytopes on 34 vertices that are not rational. All real algebraic numbers are needed to realize all possible combinatorial types of 4-dimensional polytopes.

- Let Δ be a (convex) polytope of dimension d. Put $f_{-1} := 1$,

$$f_i := \#\{ \text{ faces of dimension i } \},$$

and define the f-vector

$$f(\Delta) := (f_{-1}, f_0, \ldots, f_{d-1}).$$

- Let Δ be a (convex) polytope of dimension d. Put $f_{-1} := 1$,

$$f_i := \#\{ \text{ faces of dimension i } \},$$

and define the f-vector

$$f(\Delta) := (f_{-1}, f_0, \ldots, f_{d-1}).$$

- Put $h_0 = 1$, $h_1 := f_0 - d$,

$$\sum_{k=0}^{d} f_{i-1}(1-t)^{d-i} = \sum_{k=0}^{d} h_k t^{d-k},$$

and define the h-vector

$$h(\Delta) := (h_0, h_1, \ldots, h_d).$$

Billera, Stanley, ... (1980)

Assume that Δ is rational. Then

- $h_k = h_{d-k}$, for all $0 \le k \le d$

Billera, Stanley, ... (1980)

Assume that Δ is rational. Then

- $h_k = h_{d-k}$, for all $0 \leq k \leq d$
- h_k is increasing, for $0 \leq k \leq d/2$.

Billera, Stanley, ... (1980)

Assume that Δ is rational. Then

- $h_k = h_{d-k}$, for all $0 \leq k \leq d$
- h_k is increasing, for $0 \leq k \leq d/2$.

Proof, key words:

- passage to algebraic geometry, toric varieties
- Poincare duality
- Hard Lefschetz theorem

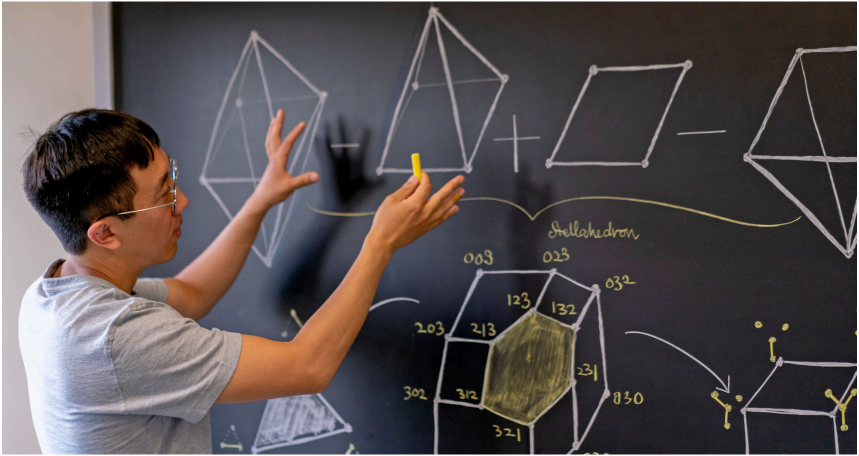
Irrational polytopes

The argument completely collapses for irrational polytopes. The starting point for June Huh (Fields medal 2022) was the discovery that there exists a purely combinatorial analog of Hodge theory for polytopes.

The argument completely collapses for irrational polytopes. The starting point for June Huh (Fields medal 2022) was the discovery that there exists a purely combinatorial analog of Hodge theory for polytopes.

This led to breakthrough results in classical problems of combinatorics (graph theory, matroid theory, etc).

June Huh



- Combinatorics (Ziegler)

Polytopes - further applications

- Combinatorics (Ziegler)
- Hypergeometric functions, asymptotics of integrals

Polytopes - further applications

- Combinatorics (Ziegler)
- Hypergeometric functions, asymptotics of integrals
- Gromov-Witten theory, theory of atoms (Kontsevich, Soibelman, Pantev, Katzarkov)

- Combinatorics (Ziegler)
- Hypergeometric functions, asymptotics of integrals
- Gromov-Witten theory, theory of atoms (Kontsevich, Soibelman, Pantev, Katzarkov)
- Minimal model program, cones of ample and effective divisors

Glimpses of arithmetic geometry

Legendre: If

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \qquad (*)$$

has nontrivial solutions mod p, for all p, and in $\mathbb{R}$ then it has nontrivial solutions in $\mathbb{Z}$. Moreover, the height of the smallest nontrivial solution is bounded by $\sqrt{|abc|}$.

Legendre: If

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \qquad (*)$$

has nontrivial solutions mod p, for all p, and in $\mathbb{R}$ then it has nontrivial solutions in $\mathbb{Z}$. Moreover, the height of the smallest nontrivial solution is bounded by $\sqrt{|abc|}$.

Questions:

- Local-global principle?

Legendre: If

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \qquad (*)$$

has nontrivial solutions mod p, for all p, and in $\mathbb{R}$ then it has nontrivial solutions in $\mathbb{Z}$. Moreover, the height of the smallest nontrivial solution is bounded by $\sqrt{|abc|}$.

Questions:

- Local-global principle?
- How many rational points of bounded height?

Legendre: If

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0 \qquad (*)$$

has nontrivial solutions mod p, for all p, and in $\mathbb{R}$ then it has nontrivial solutions in $\mathbb{Z}$. Moreover, the height of the smallest nontrivial solution is bounded by $\sqrt{|abc|}$.

Questions:

- Local-global principle?
- How many rational points of bounded height?

Hasse-Minkowski principle

Let X be a smooth projective variety over a number field F.

HP

$X(F_v) \neq \emptyset \quad \forall v \Rightarrow X(F) \neq \emptyset$

Hasse-Minkowski principle

Let X be a smooth projective variety over a number field F.

HP

$X(F_v) \neq \emptyset \quad \forall v \Rightarrow X(F) \neq \emptyset$

HP holds for quadrics, hypersurfaces of small degree.

Let X be a smooth projective variety over a number field F.

HP

$X(F_v) \neq \emptyset \quad \forall v \Rightarrow X(F) \neq \emptyset$

HP holds for quadrics, hypersurfaces of small degree.

Counterexamples to HP:

- Iskovskikh 1971: The conic bundle

$$x^2 + y^2 = f(t)z^2, \qquad f(t) = (t^2 - 2)(3 - t^2),$$

- Cassels, Guy 1966: The cubic surface

$$5x^3 + 9y^3 + 10z^3 + 12t^3 = 0.$$

Let X be a smooth projective variety over a number field F.

HP

$X(F_v) \neq \emptyset \quad \forall v \Rightarrow X(F) \neq \emptyset$

HP holds for quadrics, hypersurfaces of small degree.

Counterexamples to HP:

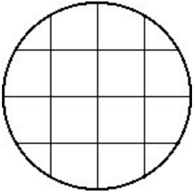
- Iskovskikh 1971: The conic bundle

$$x^2 + y^2 = f(t)z^2, \qquad f(t) = (t^2 - 2)(3 - t^2),$$

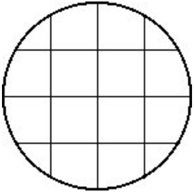
- Cassels, Guy 1966: The cubic surface

$$5x^3 + 9y^3 + 10z^3 + 12t^3 = 0.$$

Proofs: quadratic and cubic reciprocity, class numbers, ...,
Brauer-Manin obstruction



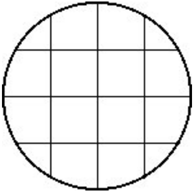
Counting lattice points



Basic observation

# of lattice points $\sim$ volume $+$ error term

Counting lattice points



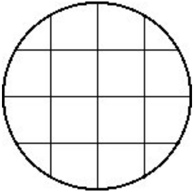
Basic observation

$\#$ of lattice points $\sim$ volume $+$ error term

Basic problems

- compute the volume

Counting lattice points



Basic observation

$\#$ of lattice points $\sim$ volume $+$ error term

Basic problems

- compute the volume
- prove that the error term is smaller than the main term

Rational points on $\mathbb{P}^1$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \{\mathsf{x} = (x_0, x_1) \in (\mathbb{Z}^2 \setminus 0)/\pm \mid \gcd(x_0, x_1) = 1\}$$

Rational points on $\mathbb{P}^1$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \{\mathsf{x} = (x_0, x_1) \in (\mathbb{Z}^2 \setminus 0)/\pm \mid \gcd(x_0, x_1) = 1\}$$

Height function

$$\begin{array}{rccc} H\colon & \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) & \to & \mathbb{R}_{>0} \\ & \mathsf{x} & \mapsto & \sqrt{x_0^2 + x_1^2} \end{array}$$

Rational points on $\mathbb{P}^1$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \{\mathsf{x} = (x_0, x_1) \in (\mathbb{Z}^2 \setminus 0)/\pm \mid \gcd(x_0, x_1) = 1\}$$

Height function

$$\begin{array}{rccc} H\colon & \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) & \to & \mathbb{R}_{>0} \\ & \mathsf{x} & \mapsto & \sqrt{x_0^2 + x_1^2} \end{array}$$

Counting function

$$N(B) := \#\{\mathsf{x} \mid H(\mathsf{x}) \leq B\} \sim$$

Rational points on $\mathbb{P}^1$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \{\mathsf{x} = (x_0, x_1) \in (\mathbb{Z}^2 \setminus 0)/\pm \mid \gcd(x_0, x_1) = 1\}$$

Height function

$$\begin{array}{rccc} H\colon & \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) & \to & \mathbb{R}_{>0} \\ & \mathsf{x} & \mapsto & \sqrt{x_0^2 + x_1^2} \end{array}$$

Counting function

$$N(B) := \#\{\mathsf{x} \mid H(\mathsf{x}) \le B\} \sim \qquad \pi \cdot B^2, \quad B \to \infty$$

Rational points on $\mathbb{P}^1$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) = \{\mathrm{x} = (x_0, x_1) \in (\mathbb{Z}^2 \setminus 0)/\pm \mid \gcd(x_0, x_1) = 1\}$$

Height function

$$\begin{array}{rccc} H\colon & \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) & \to & \mathbb{R}_{>0} \\ & \mathrm{x} & \mapsto & \sqrt{x_0^2 + x_1^2} \end{array}$$

Counting function

$$N(B) := \#\{\mathrm{x} \mid H(\mathrm{x}) \leq B\} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\zeta(2)} \cdot \pi \cdot B^2, \quad B \to \infty$$

Leading constant

$$\frac{1}{\zeta(2)} = \prod_p (1 + \frac{1}{p}) \cdot (1 - \frac{1}{p})$$

Leading constant

$$\frac{1}{\zeta(2)} = \prod_p (1 + \frac{1}{p}) \cdot (1 - \frac{1}{p}) = \prod_p \frac{\#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}{p} \cdot (1 - \frac{1}{p})$$

Leading constant

$$\frac{1}{\zeta(2)} = \prod_p (1 + \frac{1}{p}) \cdot (1 - \frac{1}{p}) = \prod_p \frac{\#\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_p)}{p} \cdot (1 - \frac{1}{p})$$

We will interpret this as a volume with respect to a natural regularized measure on the adelic space $\mathbb{P}^1(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{fin}})$.

Counting rational points

Counting problems depend on:

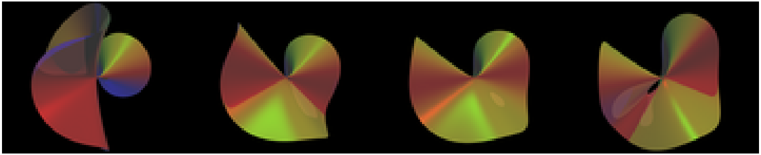
- a projective embedding $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$;
- a choice of $X^\circ \subset X$;
- a choice of a height function $\mathrm{H} : \mathbb{P}^n(F) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Counting problems depend on:

- a projective embedding $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$;
- a choice of $X^\circ \subset X$;
- a choice of a height function $\mathrm{H} : \mathbb{P}^n(F) \to \mathbb{R}_{>0}$.

Main problem

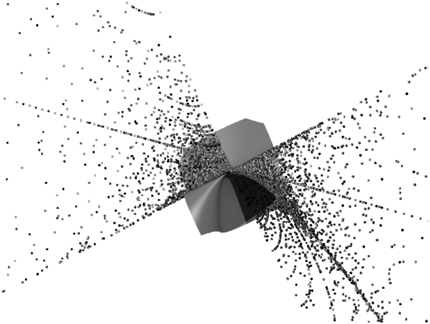
$$\mathrm{N}(X^\circ(F), \mathrm{B}) = \#\{x \in X^\circ(F) \mid \mathrm{H}(x) \leq \mathrm{B}\} \overset{?}{\sim} c \cdot \mathrm{B}^a \log(\mathrm{B})^{b-1}$$



Deforming singularities on cubic surfaces

In all cases, we expect $B \log(B)^6$ rational points of bounded height, on the complement of lines.

Cubic forms (U. Derenthal)



Points of height ≤ 1000 on the E_6 singular cubic surface $X \subset \mathbb{P}^3$

$$x_1 x_2^2 + x_2 x_0^2 + x_3^3 = 0,$$

with $x_0, x_2 > 0$.

Let $X^\circ := X \setminus \mathfrak{l}$, the unique line on X given by $x_2 = x_3 = 0$.

R. de la Bretèche, T. D. Browning, U. Derenthal (2005)

$$N(X^\circ(\mathbb{Q}), B) \sim c \cdot B \log(B)^6, \quad B \to \infty.$$

Leading constant

$$c = \alpha \cdot \beta \cdot \tau$$

where

- $\alpha = \frac{1}{6220800}$ – this is the volume of a certain polytope

$$c = \alpha \cdot \beta \cdot \tau$$

where

- $\alpha = \frac{1}{6220800}$ – this is the volume of a certain polytope
- $\beta = 1$ – this is the order of the relative Brauer group
- $\tau = \prod_p \tau_p \cdot \tau_\infty$ – this is an adelic volume,

$$\tau_p = \frac{(p^2 + 7p + 1)}{p^2} \cdot (1 - \frac{1}{p})^7 = \frac{\#X(\mathbb{F}_p)}{p^2} \cdot (1 - \frac{1}{p})^7$$

$$\tau_\infty = 6 \int_{|tv^3| \leq 1, |t^2 + u^3| \leq 1, 0 \leq v \leq 1, |uv^4| \leq 1} \mathrm{d}t\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

Conjecture (Manin 1989)

Let $X \subset \mathbb{P}^n$ be a smooth projective Fano variety over a number field F, in its anticanonical embedding. Then there exists a Zariski open subset $X^\circ \subset X$ such that

$$\mathsf{N}(X^\circ(F), \mathsf{B}) \sim c \cdot \mathsf{B} \log(\mathsf{B})^{b-1}, \quad \mathsf{B} \to \infty,$$

where $b = \mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}(X)$, and $c = \alpha \cdot \beta \cdot \tau$.

This conjecture holds for many homogeneous spaces, e.g.,

- flag varieties (Franke–Manin–T. 1989),
- toric varieties (Batyrev–T. 1995),
- bi-equivariant compactifications of unipotent groups (Shalika–T. 2016), or
- $\{ax + b\}$-group (Tanimoto–T. 2012, general case by V. Wang 2023).

This conjecture holds for many homogeneous spaces, e.g.,

- flag varieties (Franke–Manin–T. 1989),
- toric varieties (Batyrev–T. 1995),
- bi-equivariant compactifications of unipotent groups (Shalika–T. 2016), or
- $\{ax+b\}$-group (Tanimoto–T. 2012, general case by V. Wang 2023).

But there are also counterexamples, in dimension 3 by Batyrev-T. (1996), for del Pezzo surfaces by Runxuan Gao (2022).

Chambert-Loir–T. (2010) proposed a framework interpolating the theories of rational and integral points; e.g., a log-version of Peyre's constant, the constants *a* and *b*.

Chambert-Loir–T. (2010) proposed a framework interpolating the theories of rational and integral points; e.g., a log-version of Peyre's constant, the constants a and b.

- A wealth of results via ergodic theory, by Duke, Rudnick, Sarnak, Eskin, McMullen, Mozes, Shah, Oh, Gorodnik, Maucourant, Nevo, Weiss, ... for $X^\circ = G/H$, Chambert-Loir–T. (2010) proposed a framework interpolating the theories of rational and integral points; e.g., a log-version of Peyre's constant, the constants a and b.

- A wealth of results via ergodic theory, by Duke, Rudnick, Sarnak, Eskin, McMullen, Mozes, Shah, Oh, Gorodnik, Maucourant, Nevo, Weiss, ... for $X^\circ = G/H$,
- Chambert-Loir–T. and Takloo-Bighash–T.: partial equivariant compactifications of additive groups, semi-simple groups.

Far-reaching generalizations to

- Campana points (Loughran, Tanimoto, Pieropan, Schindler, Smeets, ...)
- points on stacks, connections to Malle's conjecture about number of extensions $F/\mathbb{Q}$ with prescribed Galois group and bounded discriminant (Darda, Yasuda, Loughran, Santens)

We are hearing about the arithmetization of all branches of mathematics. Some consider arithmetic a necessary civil service, to govern the extended domains of mathematics. Some view it as the high police, to supervise all processes in the empire of numbers and functions.

We are hearing about the arithmetization of all branches of mathematics. Some consider arithmetic a necessary civil service, to govern the extended domains of mathematics. Some view it as the high police, to supervise all processes in the empire of numbers and functions.

I am quite optimistic: we may not be too far from the time when pure arithmetic will have contributed to physics and chemistry, when it will become clear that basic properties of matter have something to do with decompositions of primes into sums of two squares.

We are hearing about the arithmetization of all branches of mathematics. Some consider arithmetic a necessary civil service, to govern the extended domains of mathematics. Some view it as the high police, to supervise all processes in the empire of numbers and functions.

I am quite optimistic: we may not be too far from the time when pure arithmetic will have contributed to physics and chemistry, when it will become clear that basic properties of matter have something to do with decompositions of primes into sums of two squares. On that day, arithmetic will be praised by everyone!