МАЛКА ТЕОРЕМА НА ПИКАР ЗА ЦЕЛИ ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦИ

ОЛЕГ МУШКАРОВ И НИКОЛАЙ НИКОЛОВ

ОТЧЕТНА СЕСИЯ НА СЕКЦИЯ АГТ, 5 ДЕКЕМВРИ, 2024 Г.

ТЕОРЕМИ НА ПИКАР

Малка теорема на Пикар

Всяка неконстантна цяла функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ пропуска най-много една стойност, т.е. $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ или $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Голяма теорема на Пикар за цели функции

Всяка цяла функция, която не е полином, приема всяка стойност с изключение най-много на една безбройно много пъти.

Разклонени стойности на цели функции

Дефиниция

Комплексното число a се нарича *разклонена стойност* на цялата функция f, ако всички корени на уравнението $f(z) = a$ са кратни, т.е. от $f(z) = a$ следва, че $f'(z) = 0$.

Основни факти

- Всеки полином има най-много една разклонена стойност.
- Всяка цяла функция има най-много две разклонени стойности. Ако f има две разклонени стойности a и b, то всяко от уравненията $f(z) = a$ и $f(z) = b$ има поне един корен с кратност 2.
- Ако цяла функция пропуска стойност, то тя няма разклонена стойност.

МАЛКА ТЕОРЕМА НА ПИКАР ЗА МАТРИЦИ

Ако $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ и $A \in M_n(\mathbb{C})$, полагаме $f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k A^k$.
Нека E_a е множеството на матриците от $M_n(\mathbb{C})$ с поне една собствена стойност a и $S_a \subset E_a$ е множеството на матриците, чиито Жорданови форми имат нетривиален блок, отговарящ на a.

Теорема

Нека $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ е неконстантна цяла функция.
(i) Ако f пропуска a, то $f(M_n(\mathbb{C})) = M_n(\mathbb{C}) \setminus E_a$.
(ii) Ако f приема всички стойности и няма разклонена стойност, то $f(M_n(\mathbb{C})) = M_n(\mathbb{C})$.
(iii) Ако f има една разклонена стойност a, то $f(M_n(\mathbb{C})) = M_n(\mathbb{C}) \setminus S_a^f$, където $\emptyset \neq S_a^f \subset S_a$. Освен това, $S_a^f = S_a$ тогава и само тогава, когато всеки корен на уравнението $f(z) = a$ има кратност поне n. В частност, $S_a^f = S_a$ при $n = 2$.
(iv) Ако f има две разклонени стойности a и b, то $f(M_n(\mathbb{C})) = M_n(\mathbb{C}) \setminus (S_a^f \bigcup S_b^f)$, където $\emptyset \neq S_a^f \subset S_a$ и $\emptyset \neq S_b^f \subset S_b$. Освен това, $S_a^f = S_a$ и $S_b^f = S_b$ при $n = 2$, докато $S_a^f \neq S_a$ и $S_b^f \neq S_b$ при $n \geq 3$.

ПРИМЕРИ

Пример 1

Всеки полином от втора степен има една разклонена стойност.
Полиномът $P(z) = z^k(z-1)$ $(k \geq 2)$ няма разклонена стойност.

Пример 2

Функцията $f(z) = e^z + a$ пропуска само a.

Пример 3

Функцията $f(z) = ze^z$ приема всяка стойност и няма разклонена стойност.

Пример 4

Функцията $f(z) = z^k e^{cz} + a$ $(k \geq 2)$ има една разклонена стойност и тя е a.

Пример 5

Функцията $f(z) = (a-b)\cos z + a + b$ има две разклонени стойности $2a$ и $2b$.