

**БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ**  
**ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА**

Утвърдил:

(проф. дмн П. Бойваленков, Директор на ИМИ-БАН)

**КОНСПЕКТ**

**за кандидат-докторантски изпит**  
**по докторска програма Алгебра и теория на числата**  
**по основен конкурс за учебната 2024/25 година**

1. Линейни оператори в крайномерно линейно пространство  $V$ ; матрица на линейен оператор относно базис на  $V$ , трансформация на матрицата при смяна на базиса. Пръстени и алгебри от линейни оператори, матрична реализация. Характеристичен полином и собствени стойности на линейен оператор и матрица. Обща и специална линейна група.
2. Полиноми и функции от матрици. Теорема на Хамилтън-Кейли.
3. Съществуване на жорданова нормална форма на линейен оператор в крайномерно пространство. Единственост на жордановата нормална форма.
4. Билинейни и квадратични форми. Симетрични и ермитови линейни оператори. Положително дефинитни реални квадратични форми.
5. Симетрични групи. Теорема на Кейли. Простота на алтернативните групи от степен  $\geq 5$ . Нормални подгрупи на симетричните групи.
6. Китайска теорема за остатъците. Директно произведение на пръстени. Сравнения, теорема на Ойлер-Ферма.
7. Символ на Лъжандър. Критерий на Ойлер. Гаусови суми. Закон на Гаус за квадратична реципрочност, доказателство чрез гаусови суми.
8. Теорема на Силв. Крайни  $p$ -групи: нетривиалност на центъра и нормалност на максималните подгрупи на крайна  $p$ -група.
9. Представяния на крайни групи. Теорема на Машке.
10. Основна теорема за крайно-породените абелеви групи.
11. Модули, подмодули и фактор-модули. Теорема за хомоморфизмите на модули. Лема на Шур за хомоморфизмите на неприводими модули.
12. Нютерови пръстени. Теорема на Хилберт за базиса.
13. Крайно-породени комутативни алгебри над поле. Теорема на Хилберт за нулите.
14. Асоциативни алгебри над поле. Подалгебри, фактор-алгебри и хомоморфизми на алгебри. Структурни константи.
15. Крайномерни асоциативни алгебри с деление над поле. Теорема на Фробениус.
16. Алгебри на Ли; структурни константи, тждество на Якоби. Универсална обвиваща алгебра. Теорема на Поанкаре-Биркхоф-Вит.
17. Крайни и алгебрични разширения на полета. Съвършени полета, теорема за примитивния елемент. Съществуване и единственост на алгебрична обвивка (теорема на Щайниц).
18. Алгебрическа затвореност на полето на комплексните числа (теорема на Даламбер).
19. Нормални разширения. Поле на разлагане. Основна теорема на теорията на Галоа при съвършено основно поле.
20. Крайни полета, теорема за съществуване и единственост. Цикличност на мултипликативната група на крайно поле. Група от автоморфизми.
21. Циклотомични разширения, нормалност и абелевост на групата на Галоа.
22. Теория на инвариантите на крайни групи – формула на Молин и теорема на Еми Нютер за крайната породеност.
23. Свободни асоциативни алгебри. Алгебра на Грасман. Полиномни тждества. Пораждане на  $T$ -идеалите в характеристика 0 с полилинейни тждества. Многообразия от алгебри и относително свободни алгебри. Теорема на Биркхоф за многообразията като класове, затворени относно подалгебри, хомоморфни образи и декартови произведения.
24. Теорема на Амицур-Левицки. (Матриците от ред  $n$  удовлетворяват стандартното тждество от степен  $2n$ .)

## Литература

1. М. Артин, Algebra, 2<sup>nd</sup> Ed., Pearson Prentice Hall, 2011.
2. Г. Генов, Ст. Миховски, Т. Моллов, Алгебра с теория на числата, „Наука и изкуство“, София, 1991.
3. Пл. Сидеров, Записки по алгебра – Линейна алгебра, Веди, София, 2001.
4. Пл. Сидеров, К. Чакърян, Записки по алгебра – групи, пръстени, полиноми, „Веди“, София, 2002.
5. А. Попов, Пл. Сидеров, К. Чакърян, Ръководство по висша алгебра – теория на Галоа, „Веди“, София, 2010.
6. М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, Основы теории групп, Москва, 1972. M.I. Kargapolov, Ju.I. Merzljakov, Fundamentals of the theory of groups, Transl. from the 2nd Russian ed. by Robert G. Burns, Graduate Texts in Mathematics, 62, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 1979.
7. J.E. Humphreys, Introduction to Lie algebras and representation theory, 3rd printing, rev. Graduate Texts in Mathematics, 9, New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag, 1980.
8. S. Lang, Algebraic Numbers, Addison-Wesley Series in Mathematics. Reading, Mass. etc.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. IX, 1964.
9. S. Lang, Algebra, 3rd revised edition, Graduate Texts in Math., New York, Springer, 2005.
10. R. Pierce, Associative Algebras, Graduate Texts in Math., Vol. 88, Springer-Verlag, New York, Heidelberg-Berlin, 1982.
11. A. I. Kostrikin, Yu. I. Manin, Linear algebra and geometry, (English translation), Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1997.
12. Т.А. Springer, Invariant theory, Lecture Notes in Mathematics. 585. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1977, Т. Спрингер, Теория инвариантов, Москва, 1981.
13. V. Drensky, Invariants and automorphisms of polynomial algebras, University of Hong Kong, 2001, <http://store.fmi.uni-sofia.bg/fmi/algebra/drensky/> INVARIANTS\_AND\_AUTOMORPHISMS\_OF\_POLYNOMIAL\_ALGEBRAS.pdf.
14. V. Drensky, Free algebras and PI-algebras, Springer-Verlag, Singapore, 2000.
15. V. Drensky, E. Formanek, Polynomial Identity Rings, Advanced Courses in Mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser, Basel-Boston, 2004.
16. G. Birkhoff, On the structure of abstract algebras, Proc. Camb. Philos. Soc. 31 (1935), 433-454.
17. S. Rosset, A new proof of the Amitsur-Levitzki identity, Israel J. Math. 23 (1976), 187-188.

Изпитът е писмен и устен. На писмения изпит се дават два въпроса от конспекта и една задача. Устният изпит е събеседване по задачата и въпросите от конспекта.

дата: 08.03.2024 г.

Съставил:

\_\_\_\_\_ (акад. проф. д-р Веселин Дренски)

---

Конспектът е обсъден и одобрен на заседание на секция „Алгебра и логика“ на 08.03.2024 г.

Ръководител секция:

\_\_\_\_\_ (доц. д-р Димитър Гелев)

---

Разгледан от Директорския съвет на ИМИ-БАН на 21.03.2024 г. (протокол № 13).

---

Приет от Научния съвет на ИМИ-БАН на 22.03.2024 г. (протокол № 3).