БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Утвърдил:
(проф. дмн П. Бойваленков, директор на ИМИ-БАН)

КОНСПЕКТ

за кандидат-докторантски изпит
по докторска програма Диференциални уравнения
по допълнителен конкурс за учебната 2023/24 година
и по основен конкурс за учебната 2024/25 година

1. Елементарни методи за интегриране на ОДУ от първи ред: уравнения с разделящи се променливи, хомогенни уравнения, линейни уравнения, уравнения на Бернули и Рикати, интегриращи множители.
2. Съществуване и единственост на решенията за задачата на Коши за уравнения от вида $y' = f(x,y)$. Непродължими решения и снопове на Пеано.
3. Линейни хомогенни ОДУ, фундаментална система от решения. Линейни нехомогенни ОДУ, метод на Лагранж.
4. Линейни хомогенни ОДУ с постоянни коефициенти, характеристични полиноми. Нехомогенни ОДУ с постоянни коефициенти. Квазиполиноми.
5. Нормални системи ОДУ. Задача на Коши, теорема за съществуване и единственост, фундаментална система от решения. Свеждане на ОДУ от n-ти ред към нормални системи.
6. Линейни системи, съществуване и единственост на решението. Линейни хомогенни системи. Линейни нехомогенни системи, метод на Лагранж.
7. Непрекъснатост и диференцируемост спрямо начални условия и параметър на решенията на нормална система.
8. Автономни системи. Фазово пространство и фазови портрети. Класификация на особените точки на линейни системи в равнината.
9. Динамични системи, локални бифуркации.
10. ЧДУ от първи ред. Характеристична система и задача на Коши.
11. Класификация на квазилинейните ЧДУ от втори ред. Постановка на задачата на Коши и на основни гранични задачи. Характеристики.
12. Елиптични уравнения, формули на Грийн, свойства на фундаменталното решение на уравнението на Лаплас.
13. Съществуване на решение на задачата на Коши за вълновото уравнение, формула на Кирхоф. Свойства на фундаменталното решение на вълновия оператор, смесена задача за хиперболични уравнения.
14. Уравнение на топлопроводността. Задача на Дирихле. Теорема за единственост.
15. Преобразования на Фурие, Лаплас и Радон за обобщени функции, свойства, обратни преобразования.
16. Съществуване на фундаментални решения за линейни диференциални оператори с постоянни коефициенти. Примери за уравненията на Хелмхолц и еластичността.

Литература

1. Т. Генчев, Обикновени диференциални уравнения, УИ "Св. Климент Охридски", София, 1991.
2. Т. Генчев, Частни диференциални уравнения, УИ "Св. Климент Охридски", София, 2004.
3. А. Живков, Ръководство по диференциални уравнения, София, 2003.
4. П. Попиванов, Н. Попиванов, Й. Йорданов, Ръководство по частни диференциални уравнения, УИ "Св. Климент Охридски", София, 1991.
5. L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, 1998.
6. G. Teschl, Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, Graduate Studies in Mathematics, vol. 140, American Mathematical Society, Providence, 2012.
7. J.D. Meiss, Differential dynamical systems, Mathematical Modeling and Computation series, SIAM , Philadelphia, 2008
8. V. Vladimirov, Equations of mathematical physics, Nauka, Moscow, 1984.

Дата: 20.03.2024 г. Съставил: ____________

(доц. д-р Тихомир Вълчев)

Конспектът е обсъден и одобрен на заседание на секция „Диференциални уравнения и математическа физика“ на 20.03.2024 г.

Ръководител секция: ____________

(доц. д-р Георги Бояджиев)

Разгледан от Директорския съвет на ИМИ-БАН на 21.03.2024 г. (протокол № 13).

Приет от Научния съвет на ИМИ-БАН на 22.03.2024 г. (протокол № 3).

BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATICS

Approved by:

(Prof. DSc P. Boyvalenkov, Director of IMI-BAS)

QUESTIONNAIRE (List of selected questions)
for PhD Entrance Exam
PhD Programme Differential Equations
according to an additional competition for the school year 2023/2024
and competition for the school year 2024/2025

1. Elementary methods of integration of first order ODEs: equations with separated variables, homogeneous equations, linear equations, Bernoulli and Riccati equations, integrating factors.
2. Existence and uniqueness of the solutions to the Cauchy problem for equations of the type y` = f(x,y). The notion of inextensible solutions and Peano bundles.
3. Linear homogeneous ODEs, fundamental system of solutions. Linear inhomogeneous ODEs, Lagrange's method of variation of constants.
4. Linear homogeneous ODEs with constant coefficients, characteristic polynomials. Inhomogeneous ODEs with constant coefficients. Quasipolynomials.
5. Normal systems of ODEs. Cauchy problem, existence and uniqueness theorem, fundamental set of the solutions. Reducing n-th order ODEs to normal systems.
6. Linear systems, existence and uniqueness of solution. Linear homogeneous systems. Linear inhomogeneous systems, Lagrange's method.
7. Continuity and differentiability of the solutions of a normal system with respect to initial conditions and parameters.
8. Autonomous systems. Phase space and phase portraits. Classification of singular points of linear systems in the plane.
9. Dynamic systems, local bifurcations.
10. First order PDEs. Characteristic system and Cauchy problem.
11. Classification of second order quasilinear PDEs. Formulation of the Cauchy problem and basic boundary value problems. Characteristics.
12. Elliptic equations, Green's formulas, properties of the fundamental solution of the Laplace equation.
13. Existence of the solution to the Cauchy problem for the wave equation, Kirchhoff's formula. Properties of the fundamental solution of the wave operator, a mixed problem for hyperbolic equations.
14. Heat equation. Dirichlet's problem. Singularity theorem.
15. Fourier, Laplace and Radon transforms for generalized functions, properties, inverse transforms.
16. Existence of fundamental solutions for linear differential operators with constant coefficients. Examples of the Helmholtz equations and elasticity.

References

1. L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Texts in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, 1998.
2. T. Genchev, Ordinary Differential Equations, “St. Kliment Ohridski” University Press, Sofia, 1991. (in Bulgarian)
3. T. Genchev, Partial Differential Equations, “St. Kliment Ohridski” University Press, Sofia, 2004. (in Bulgarian)
4. P. Popivanov, N. Popivanov, J. Jordanov, Handbook in Partial Differential Equations, “St. Kliment Ohridski” University Press, Sofia, 1991. (in Bulgarian).
5. G. Teschl, Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems, Graduate Studies in Mathematics, vol. 140, American Mathematical Society, Providence, 2012.
6. J.D. Meiss, Differential dynamical systems, Mathematical Modeling and Computation series, SIAM , Philadelphia, 2008.
7. A. Zhivkov, Handbook on Differential Equations, Sofia, 2003. (in Bulgarian)
8. V. Vladimirov, Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1984.

Date: 20.03.2024 Compiler:

____

(Assoc. Prof. Tihomir Valchev, PhD)

Discussed and approved at a meeting of the Department “Differential Equations and Mathematical Physics”, held on 20.03.2024

Head of Department:

____

(Assoc. Prof. Georgi Boyadzhiev, PhD)

Approved by the Board of Directors of IMI-BAS on 21.03.2024 (Minutes No. 13)

Accepted by the Scientific Council of IMI-BAS on 22.03.2024 (Minutes No. 3)