Връзка между минималните Лоренцови повърхнини в $\mathbb{R}^4_2$ и $\mathbb{R}^3_1$

Красимир Кънчев, Огнян Касабов

София, БЪЛГАРИЯ

Декември, 2023

Съдържание

Всяка Лоренцова повърхнина в $\mathbb{R}^n_k$ притежава

Изотермични и изотропни локални координати

$$\mathbf{I} = E(du^2 - dv^2)\,; \quad \mathbf{I} = 2F dt_1\, dt_2\,.$$

$$t_1 = u + v; \quad t_2 = u - v.$$

В работата
Kanchev K.; Kassabov O.; Milousheva V., *Explicit solving of the system of natural PDEs of minimal Lorentz surfaces in* $\mathbb{R}^4_2$, Journal of Mathematical Analysis and Applications **510**(1), (2022),
за дадена минимална Лоренцова повърхнина в $\mathbb{R}^4_2$ от общ тип са въведени канонични изотропни координати.

Минимални Лоренцови повърхнини и изотропни криви

Нека $\mathcal{M} = (\mathcal{D}, \mathrm{x})$ е минимална Лоренцова повърхнина, зададена с изотропни координати.

Минимална Лоренцова повърхнина

$$\mathrm{x}(t_1, t_2) = \frac{\alpha_1(t_1) + \alpha_2(t_2)}{2}\,,$$

където (α_1, α_2) са двойка изотропни криви, а (t_1, t_2) са двойка изотропни координати за $\mathcal{M}$. $(\alpha_1'^2 = 0; \;\; \alpha_2'^2 = 0)$.

Канонични изотропни координати

$$\alpha_1''^2 = \pm 1\,; \quad \alpha_2''^2 = \pm 1\,.$$

Канонично представяне на Вайерщрас в $\mathbb{R}^4_2$

Нека $\mathcal{M}$ е минимална Лоренцова повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^4_2$, зададена с канонични изотропни координати.

За съответните на $\mathcal{M}$ изотропни криви α_1 и α_2 е в сила:

$$\alpha_i' = \left(\frac{\omega_i}{2} \frac{g_i h_i + 1}{\sqrt{|g_i' h_i'|}} , \frac{\omega_i}{2} \frac{g_i h_i - 1}{\sqrt{|g_i' h_i'|}} , \frac{\omega_i}{2} \frac{h_i - g_i}{\sqrt{|g_i' h_i'|}} , \frac{\omega_i}{2} \frac{h_i + g_i}{\sqrt{|g_i' h_i'|}} \right) ,$$

където: $i = 1; 2;\ \omega_i = \pm 1$, а (g_i, h_i) са две двойки гладки реални функции, такива че:

Функциите (g_i, h_i) удовлетворяват условията:

$$g_1' h_1' \neq 0\,; \quad g_2' h_2' \neq 0\,; \quad g_1(t_1) \neq g_2(t_2)\,; \quad h_1(t_1) \neq h_2(t_2)\,.$$

Трансформационни формули при движение в $\mathbb{R}^4_2$

Две изотропни криви $\hat{\alpha}$ и α са свързани със собствено движение в $\mathbb{R}^4_2$ от вида: $\hat{\alpha}(t) = A\alpha(t) + \mathrm{b}$, където $A \in \mathbf{SO}(2,2,\mathbb{R})$ и $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^4_2$, тогава и само тогава, когато:

$(\hat{g}, \hat{h})$ и (g, h) са свързани с дробно-линейни функции:

$$\hat{g} = \frac{a_1 g + b_1}{c_1 g + d_1}\ ; \quad \hat{h} = \frac{a_2 h + b_2}{c_2 h + d_2}\ ; \quad \begin{array}{l} a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}\,; \\ a_1 d_1 - b_1 c_1 = a_2 d_2 - b_2 c_2 = \pm 1\,. \end{array}$$

Детерминантите на дробно-линейните функции са равни на "$+1$"при ортохронни движения и съответно са равни на "-1"при неортохронни движения.

Общо решение на системата естествени ЧДУ на минималните Лоренцови повърхнини в $\mathbb{R}^4_2$

Нека K и $\varkappa$ са съответно *Гаусовата кривина* и *кривината на нормалната свързаност (нормалната кривина)*.

Формули за K и $\varkappa$ в канонични изотропни координати:

$$K = \frac{8\sqrt{|g_1' h_1' g_2' h_2'|}}{|(g_1 - g_2)(h_1 - h_2)|}\left(\frac{g_1' g_2'}{(g_1 - g_2)^2} + \frac{h_1' h_2'}{(h_1 - h_2)^2}\right);$$

$$\varkappa = \frac{8\sqrt{|g_1' h_1' g_2' h_2'|}}{|(g_1 - g_2)(h_1 - h_2)|}\left(\frac{g_1' g_2'}{(g_1 - g_2)^2} - \frac{h_1' h_2'}{(h_1 - h_2)^2}\right),$$

където (g_i, h_i) са двете двойки гладки реални функции, участващи в каноничното представяне на Вайерщрас.

Канонично представяне на Вайерщрас в $\mathbb{R}^3_1$

Нека $\mathcal{M}$ е минимална Лоренцова повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^3_1$, зададена с канонични изотропни координати.

За съответните на $\mathcal{M}$ изотропни криви α_1 и α_2 е в сила:

$$\alpha_i' = \left(\frac{\omega_i}{2} \frac{g_i^2 + 1}{|g_i'|} , \frac{\omega_i}{2} \frac{g_i^2 - 1}{|g_i'|} , \omega_i \frac{g_i}{|g_i'|} \right) ; \qquad \omega_i = \pm 1 ,$$

където g_i; $i = 1; 2$ са две гладки реални функции, такива че:

Функциите g_i удовлетворяват условията:

$$g_1'(t_1) \neq 0 ; \qquad g_2'(t_2) \neq 0 ; \qquad g_1(t_1) \neq g_2(t_2) .$$

Трансформационни формули при движение в $\mathbb{R}^3_1$

Две изотропни криви $\hat{\alpha}$ и α са свързани със движение (*възможно несобствено*) в $\mathbb{R}^3_1$ от вида: $\hat{\alpha}(t) = A\alpha(t) + \mathrm{b}$, където $A \in \mathbf{SO}(2,1,\mathbb{R})$ и $\mathrm{b} \in \mathbb{R}^3_1$, тогава и само тогава, когато:

$\hat{g}$ и g са свързани с дробно-линейни функции:

$$\hat{g} = \frac{ag+b}{cg+d}\,; \qquad \begin{array}{l} a, b, c, d \in \mathbb{R}\,; \\ ad - bc = \pm 1\,. \end{array}$$

Детерминантите на дробно-линейната функция е равна на "$+1$"при собствени ортохронни и несобствени неортохронни движения, а съответно е равна на "-1"при собствени неортохронни и несобствени ортохронни движения.

Съответствие между изотропните криви в $\mathbb{R}^4_2$ и $\mathbb{R}^3_1$

Нека α е изотропна крива в $\mathbb{R}^4_2$ с естествен параметър.

α има представяне на Вайерщрас от вида:

$$\alpha' = \left(\frac{\omega}{2} \frac{gh+1}{\sqrt{|g'h'|}}, \frac{\omega}{2} \frac{gh-1}{\sqrt{|g'h'|}}, \frac{\omega}{2} \frac{h-g}{\sqrt{|g'h'|}}, \frac{\omega}{2} \frac{h+g}{\sqrt{|g'h'|}} \right),$$

където $(g, h); g'h' \neq 0$ са две гладки реални функции, а $\omega = \pm 1$.

Съответствие между изотропните криви в $\mathbb{R}^4_2$ и $\mathbb{R}^3_1$

От функциите g и h получаваме две изотропни криви в $\mathbb{R}^3_1$.

α_g и α_h имат представяне на Вайерщрас от вида:

$$\alpha'_g = \left(\frac{\omega_g}{2} \, \frac{g^2+1}{|g'|} \, , \, \frac{\omega_g}{2} \, \frac{g^2-1}{|g'|} \, , \, \omega_i \, \frac{g}{|g'|} \right); \qquad \omega_g = \pm 1 \, ,$$

$$\alpha'_h = \left(\frac{\omega_h}{2} \, \frac{h^2+1}{|h'|} \, , \, \frac{\omega_h}{2} \, \frac{h^2-1}{|h'|} \, , \, \omega_i \, \frac{h}{|h'|} \right); \qquad \omega_h = \pm 1 \, .$$

Така на всяка неизродена изотропна крива в $\mathbb{R}^4_2$ съпоставихме две неизродени изотропни криви в $\mathbb{R}^3_1$, определени с точност до несобствено движение.

Свойства на съответствието между изотропните криви

Полученото изображение ще означаваме накратко:

$$\alpha \longrightarrow (\alpha_g \, , \alpha_h) \, .$$

Съответствието е инвариантно при собствено движение в $\mathbb{R}^4_2$ и при смяна на параметъра.

Ако $\hat{\alpha}$ се получава от α чрез несобствено движение в $\mathbb{R}^4_2$, то:

$$\hat{\alpha} \longrightarrow (\alpha_h \, , \alpha_g) \, .$$

Ако $\hat{\alpha}$ се получава от α чрез антиизометрия в $\mathbb{R}^4_2$, то:

$$\hat{\alpha} \longrightarrow (\alpha_g \, , \alpha_{-h}) \, .$$

Съответствие между минималните Лоренцови повърхнини в $\mathbb{R}^4_2$ и $\mathbb{R}^3_1$

Нека $\mathcal{M}$ е минимална Лоренцова повърхнина от общ тип в $\mathbb{R}^4_2$, зададена с канонични изотропни координати.

$$\mathrm{x}(t_1, t_2) = \frac{\alpha_1(t_1) + \alpha_2(t_2)}{2}\,.$$

$$\alpha_1 \to (\alpha_{1g}\,, \alpha_{1h})\,; \quad \alpha_2 \to (\alpha_{2g}\,, \alpha_{2h})\,.$$

$$\mathrm{x}_g = \frac{\alpha_{1g} + \alpha_{2g}}{2}\,; \quad \mathrm{x}_h = \frac{\alpha_{1h} + \alpha_{2h}}{2}\,.$$

Така получаваме две минимални Лоренцови повърхнини от общ тип $\mathcal{M}_g$ и $\mathcal{M}_h$ в $\mathbb{R}^3_1$.

Свойства на съответствието между минималните Лоренцови повърхнини

Полученото изображение ще означаваме накратко:

$$\mathcal{M} \to (\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_h)\,.$$

Съответствието е инвариантно при собствено движение в $\mathbb{R}^4_2$ и при смяна на координатите.

Ако $\hat{\mathcal{M}}$ се получава от $\mathcal{M}$ чрез несобствено движение в $\mathbb{R}^4_2$, то:

$$\hat{\mathcal{M}} \to (\mathcal{M}_h, \mathcal{M}_g)\,.$$

Ако $\hat{\mathcal{M}}$ се получава от $\mathcal{M}$ чрез антиизометрия в $\mathbb{R}^4_2$, то:

$$\hat{\mathcal{M}} \to (\mathcal{M}_g, \mathcal{M}_{-h})\,.$$

Връзка между кривините K и $\varkappa$ на $\mathcal{M}$ в $\mathbb{R}^4_2$ и кривините K_g и K_h на $\mathcal{M}_g$ и $\mathcal{M}_h$ в $\mathbb{R}^3_1$.

При условие $|K| > |\varkappa| \iff \alpha_1''^2 \alpha_2''^2 > 0$, а $\eta = \operatorname{sign} K$:

$$K = \eta \sqrt[4]{|K_g K_h|}\, \frac{\sqrt{|K_g|} + \sqrt{|K_h|}}{2}\,; \quad \varkappa = \eta \sqrt[4]{|K_g K_h|}\, \frac{\sqrt{|K_g|} - \sqrt{|K_h|}}{2}\,.$$

При условие $|K| < |\varkappa| \iff \alpha_1''^2 \alpha_2''^2 < 0$, а $\eta = \operatorname{sign} \varkappa$:

$$K = \eta \sqrt[4]{|K_g K_h|}\, \frac{\sqrt{|K_g|} - \sqrt{|K_h|}}{2}\,; \quad \varkappa = \eta \sqrt[4]{|K_g K_h|}\, \frac{\sqrt{|K_g|} + \sqrt{|K_h|}}{2}\,.$$

Благодаря!