МЕТРИЧНИ СВЪРЗАНОСТИ И ТУИСТОРНИ ПРОСТРАНСТВА

ЙОХАН ДАВИДОВ И ОЛЕГ МУШКАРОВ

ОТЧЕТНА СЕСИЯ НА СЕКЦИЯ АГТ, 4 ДЕКЕМВРИ, 2023г.

МЕТРИЧНИ СВЪРЗАНОСТИ

Дефиниция

- (M, g) - Риманово многообразие
- $\chi(M)$ - пространството от векторните полета в-у M
- Афинна свързаност
  $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$
  $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \nabla_X fY = X(f)Y + f \nabla_X Y, f \in C^\infty(M)$
- Торзия
  $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$
- Метрична свързаност
  $\nabla g = 0 \Rightarrow X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$
- Свързаност на Леви-Чивита
  $\nabla g = 0, T = 0$

ТУИСТОРНО ПРОСТРАНСТВО

Дефиниция

- (M^{2n}, g)-четномерно ориентирано Риманово многообразие
- $\pi : \mathcal{Z} \to M$ - разслоението, чийто слой в $p \in M$ е пространството от g-ортогоналните и положително ориентирани комплексни структури върху $T_pM(\simeq SO(2n)/U(n))$.

Почти комплексна структура на Атия-Хитчин-Зингер

- ∇-метрична свързаност върху (M, g)
- $\mathcal{J}$-стандартна комплексна структура на $SO(2n)/U(n)$
- $T\mathcal{Z} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$
- $\mathcal{J}^{\nabla}|\mathcal{H}_J = (\pi_*|\mathcal{H}_J)^{-1} \circ J \circ (\pi_*|\mathcal{H}_J), \quad \mathcal{J}^{\nabla}|\mathcal{V}_J = \mathcal{J}_J$

ГЕОМЕТРИЧНИ ТОРЗИОННИ ТЕНЗОРИ

Въпрос

Кога две метрични свързаности върху (M, g) дефинират една и съща почти комплексна структура на Атия-Хитчин-Зингер?

- (AHS, 1978) Почти комплексната структура на Атия-Хитчин-Зингер е конформно инвариантна.
- (M. Dubois-Violette, 1983) Общо туисторно пространство и произволни афинни свързаности.

Торзионни тензори

- D и ∇ - метрични свързаности върху (M, g).
- $A(X, Y, Z) = g(D_X Y - \nabla_X Y, Z), \quad X, Y, Z \in TM$
- $A(X, Y, Z) + A(X, Z, Y) = 0$

НЕПРИВОДИМО РАЗЛАГАНЕ

Пространство на геометричните торзионни тензори

- $\mathcal{T} = \{T \in \bigotimes^3 TM | T(X,Y,Z) + T(X,Z,Y) = 0\} \simeq TM \bigotimes \bigwedge^2 M$
- Действие на $O(2n)$ в-у $\mathcal{T}$
  $(aT)(X,Y,Z) = T(a^{-1}X, a^{-1}Y, a^{-1}Z), \quad a \in O(2n)$

Неприводимо разлагане (F. Tricceri, L. Vanhecke, 1983)

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \oplus \mathcal{T}_2 \oplus \mathcal{T}_3$$
$$\mathcal{T}_1 = \{T \in \mathcal{T} | T(X,Y,Z) = g(X,Y)\varphi(Z) - g(X,Z)\varphi(Y), \quad \varphi \in T^*(M)\}$$
$$\mathcal{T}_2 = \{T \in \mathcal{T} | \underset{X,Y,Z}{\mathfrak{S}} T(X,Y,Z) = 0, \quad \sum_i T(e_i, e_i, Z) = 0\}$$
$$\mathcal{T}_3 = \{T \in \mathcal{T} | T(X,Y,Z) + T(Y,X,Z) = 0\}$$

ОСНОВЕН РЕЗУЛТАТ

Теорема(ДМ, 2023)

Нека D и ∇ са метрични свързаности върху ориентирано четномерно Риманово многообразие (M, g) и нека A_1, A_2, A_3 са неприводимите компоненти на тяхната разлика A. Тези свързаности определят една и съща почти комплексна структура на Атия-Хитчин-Зингер върху туисторното пространство на (M, g) тогава и само тогава, когато:

(i) $dimM = 4$ и 2-формата $i_X A_2$ е автодуална за всяко $X \in TM$;

(ii) $dimM \geq 6$ и $A_2 = A_3 = 0$.

Доказателство

(i) $\mathcal{J}^D = \mathcal{J}^\nabla \Leftrightarrow g(A(X, Y, Z) - g(A(JX, JY, Z) - g(A(JX, Y, JZ) - g(A(X, JY, JZ) = 0, J \in \mathcal{Z}$

Доказателство

(ii) Вариране на J върху 4-мерни подпространства на T_p чрез $SO(4)$ матрици

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

където $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

ВЪПРОСИ

Въпрос 1.

Кога две метрични свързаности върху (M, g) определят една и съща структура на Атия-Хитчин-Зингер, дефинирана от морфизъм Φ на туисторното разслоение?

Въпрос 2.

Нека $\widetilde{g}$ е конформна метрика на g и $\widetilde{D}$ и D са метрични свързаности относно $\widetilde{g}$ и g. Туисторните разслоения на $\widetilde{g}$ и g съвпадат. Кога структурите $\widetilde{\mathcal{J}}_\Phi$ и $\mathcal{J}_\Phi$, дефинирани чрез $\widetilde{D}$, D и морфизъм Φ на това туисторно разслоение съвпадат?