СЕКЦИЯ

„АЛГЕБРА И ЛОГИКА”

Драги колеги,

На 8 януари 2021 г. (петък) от 13:00 часа ще се проведе дистанционно заседание на семинара по „Алгебра и логика”. Доклад на тема

Диференцирания в матрични полупръстени

ще изнесе Димитринка Владева (ЛТУ – София).

Семинарът ще се проведе посредством платформата **Zoom** и всеки желаещ може да се присъедини като последва линка, зададен на страницата на семинара.

От секция „Алгебра и логика” на ИМИ – БАН

http://www.math.bas.bg/algebra/seminarAiL/

==

Резюме

В първата част на този доклад се дава описание на диференциранията в полупръстена $UTM_n(S)$ от горно триъгълните матрици над адитивно идемпотентен полупръстен S. Разглеждат се матриците $\overline{D}_k = E_{11} + \cdots + E_{kk}$, $1 \leq k \leq n$ и $\underline{D}_m = E_{n-m+1\, n-m+1} + \cdots + E_{nn}$, $1 \leq m \leq n$ и се доказва, че $\delta_k(A) = \overline{D}_k A$ и $d_m(A) = A\underline{D}_m$, където $A \in UTM_n(S)$, са диференцирания в $UTM_n(S)$. Множеството $\overline{\mathcal{D}}$ от диференцирания δ_k, $k = 1, \ldots, n$ и множеството $\underline{\mathcal{D}}$ от диференцирания d_m, $m = 1, \ldots, n$, са адитивно и мултипликативно идемпотентни полупръстени. С $\mathcal{D}$ се означава полупръстенът, породен от множеството $\overline{\mathcal{D}} \cup \underline{\mathcal{D}}$. За $\delta_k + d_m \in \mathcal{D}$ и $A \in UTM_n(S)$ се описва матрицата $(\delta_k + d_m)(A)$ и се доказва, че $\delta_k d_m \in \mathcal{D}$ тогава и само тогава, когато $\delta_k + d_m$ е идентитета. В $\mathcal{D}$ се построява базис $\mathcal{B}$ състоящ се от диференциранията $\delta_1, \delta_2\, d_{n-1}, \ldots, \delta_{n-1}\, d_2, d_1$ и $\delta_1\, d_{n-1}$, $\delta_2\, d_{n-2}$, $\ldots$, $\delta_{n-2}\, d_2$, $\delta_{n-1}\, d_1$. Основният резултат гласи, че произволно диференциране в полупръстена $UTM_n(S)$ е линейна комбинация на елементите от базиса $\mathcal{B}$ на S-полумодула $\mathcal{D}$ с коефициенти от S.

Във втората част се изучават диференциранията в полупръстена от квадратните матрици от n-ти ред над адитивно идемпотентен полупръстен S. Известен факт е, че ако $\delta : S \to S$ е диференциране в полупръстена S, то в полупръстена $M_n(S)$ от квадрадратните матрици от n-ти ред над S изображението δ_{her}, такова че $\delta_{\mathrm{her}}(A) = (\delta(a_{ij}))$ за всяка матрица $A = (a_{ij}) \in M_n(S)$, е диференциране. Тези диференцирания се използват в мнатричния анализ, диференциалните уравнения, математическата статистика, физиката и инженерните науки и се наричат наследствени диференцирания. От друга страна S-диференциране в матричния полупръстен $M_n(S)$ (в смисъл на N. Jacobson) е S-линейно изображение $D : M_n(S) \to M_n(S)$, такова че $D(AB) = AD(B) + D(A)B$, където $A, B \in M_n(S)$. Доказва се, че ако S е комутативен адитивно идемпотентен полупръстен, всяко S-диференциране е наследствено диференциране. За некомутативен полупръстен S се въвеждат понятията ляв (десен) елемент на Оре в S. Разширява се центърът $C(S)$ до полупръстенът $LO(S)$ от левите елементи на Оре или до полупръстена $RO(S)$ от десните елементи на Оре в S. Построяват се леви (десни) диференцирания и се обобщава резултата от комутативния случай.

Abstract

In the first part of this topic we give a description of the derivations in the semiring $UTM_n(S)$ of upper triangular matrices over an additively idempotent semiring S. We consider the matrices $\overline{D}_k = E_{11} + \cdots + E_{kk}$, $1 \leq k \leq n$ and $\underline{D}_m = E_{n-m+1\,n-m+1} + \cdots + E_{nn}$, $1 \leq m \leq n$ and prove that $\delta_k(A) = \overline{D}_k A$ and $d_m(A) = A\underline{D}_m$, where $A \in UTM_n(S)$, are derivations in $UTM_n(S)$. The set $\overline{\mathcal{D}}$ of derivations δ_k, $k = 1, \ldots, n$ and the set $\underline{\mathcal{D}}$ of derivations d_m, $m = 1, \ldots, n$, are additively and multiplicatively idempotent semirings. Denote by $\mathcal{D}$ the semiring generated by the set $\overline{\mathcal{D}} \cup \underline{\mathcal{D}}$. For $\delta_k + d_m \in \mathcal{D}$ and $A \in UTM_n(S)$ we describe the matrix $(\delta_k + d_m)(A)$ and prove that $\delta_k d_m \in \mathcal{D}$ if and only $\delta_k + d_m$ is an identiy map. In $\mathcal{D}$ we construct a basis $\mathcal{B}$ consisting of derivations $\delta_1, \delta_2\, d_{n-1}, \ldots, \delta_{n-1}\, d_2, d_1$ and $\delta_1\, d_{n-1}$, $\delta_2\, d_{n-2}$, $\ldots$, $\delta_{n-2}\, d_2$, $\delta_{n-1}\, d_1$. The main result states that an arbitrary derivation in the semiring $UTM_n(S)$ is a linear combination of elements of the basis $\mathcal{B}$ of the S-semimodule $\mathcal{D}$ with coefficients from S.

In the second part we study the derivations in the semiring of $n \times n$ matrices over additively idempotent semiring S. It is well-known that if $\delta : S \to S$ is a derivation in semiring S then in the semiring $M_n(S)$ of $n \times n$ matrices over S the map δ_{her} such that $\delta_{\mathrm{her}}(A) = (\delta(a_{ij}))$ for any matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(S)$ is a derivation. These derivations are used in matrix calculus, differential equations, statistics, physics and engineering and are called hereditary derivations. On the other hand S-derivation in matrix semiring $M_n(S)$ (in sense of N. Jacobson) is a S - linear map $D : M_n(S) \to M_n(S)$ such that $D(AB) = AD(B) + D(A)B$ where $A, B \in M_n(S)$. We prove that if S is a commutative additively idempotent semiring any S-derivation is a hereditary derivation. For a noncommutative semiring S is introduced a concept of left (right) Ore elements in S. Then we extend the center $C(S)$ to the semiring $LO(S)$ of left Ore elements or to the semiring $RO(S)$ of right Ore elements in S. We construct left (right) derivations in these semirings and generalize the result from the commutative case.