Аспекти от развитието на диференциалните уравнения в Института по математика и информатика при БАН през последното десетилетие

Петър Попиванов

В статията [18] бяха разгледани различни аспекти от развитието на диференциалните уравнения (ДУ) – обикновени (ОДУ) и частни (ЧДУ) – у нас през периода 1967-2007 г., когато беше отбелязан 60-годишният юбилей на ИМИ и 40-годишнината на секцията по ДУ. Задачата на тази статия е да проследи някои новополучени резултати през последните 10 години, понякога и с предисторията им, като ударението е поставено главно върху ЧДУ. По този начин свързваме миналото, дискутирано в [18], с изследванията, предшестващи 70-годишнината на ИМИ. По-долу предлагам кратък обзор върху онези направления от ДУ, които са добре застъпени в ИМИ и по които има безспорни достижения. Разбира се, наличието на личен вкус определя и известна субективност при поднасянето на резултатите, но това е неизбежно. Част от тях са получени в съавторство с колеги, външни за секцията или Института.

Ще започна изложението с някои исторически бележки. Секцията съществува вече над 50 години, защото е създадена през 1966 г. с пръв ръководител чл.-кор. Г. Брадистилов (1904-1977). От тази секция, прераснала през 1972-1988 г. в Сектор по ДУ при ЕЦММ, впоследствие се отделиха Секция по ДУ и Лаборатория, по-късно Секция по математическа физика (и двете към ИМИ) и Катедра по ДУ във ФМИ при СУ „Св. Кл. Охридски“. Нова реорганизация през 2011 г. обедини двете звена по ДУ в ИМИ в Секция ДУМФ (Диференциални уравнения и математическа физика) с ръководител проф. дмн А. Славова. През 1989-2011 г. Секция ДУ се ръководеше от акад. П. Попиванов. Сътрудници на Секция ДУМФ – бивши и настоящи, работят в реномирани университети в САЩ, Франция, Италия и др. Всички те имат безспорни заслуги за утвърждаването на международния авторитет и признание на българската школа по ДУ.

Предлаганият по-долу текст е разделен на 4 секции, където последователно са представени и коментирани в сбит вид няколко направления в областта на ЧДУ и приносът на нашите колеги в тях.

1. Жевреевски анализ

Ще започна с елементи на Жевреевския микролокален анализ, защото той има приложения в ЧДУ и определени традиции у нас с работите на Т. Грамчев, П. Попиванов, Г. Попов и др. Най-общо казано, със средствата на този анализ се уточняват и подобряват резултати за съществуване и гладкост на решенията на широки класове от ЧДУ, сред които ще посоча задачата на Коши за хиперболични уравнения и локалните свойства на решенията на израждащи се параболични уравнения от 2-ри и по-висок ред. Има и приложения във физиката.

Ще предложа няколко дефиниции [15].

Дефиниция 1 (на функции от класа на Жевре (1884-1957) от ред $s \geq 1$). Ще казваме, че гладката функция $f \in G^s(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$, т.е. принадлежи на класа на Жевре G^s в областта Ω, ако за всеки компакт $K \subset \Omega$ съществува такава константа $C_k > 0$, че

$$|D^\alpha f(x)| \leq C_K^{|\alpha|+1}(\alpha!)^s. \tag{1}$$

Очевидно при $\alpha = 1$ получаваме класа на реално-аналитичните функции G^1. При $s > 1$ пространството G^s съдържа плоски функции, т.е. такива нетривиални функции, които се анулират заедно с всичките си производни върху някакво затворено подмножество на областта $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. С $G_0^s(\Omega)$ ще бележим множеството на финитните функции в $G^s(\Omega)$, като G_0^s ще снабдим по обичайния начин с индуктивна топология. Това ни позволява да дефинираме множеството от ултраразпределения $G_s'(\Omega)$ като дуално на G_0^s, т.е. G_s' се състои от линейните непрекъснати функционали над G_0^s. Означаваме с $\mathcal{E}_s'(\Omega)$ съвкупността от ултраразпределения от ред $s > 1$, които притежават компактен носител.

И така имаме една скала от разширяващи се с растенето на s линейни пространства, която свързва G_1 с C^∞ функциите. Пространството от ултраразпределения е „свиващо се“ при растенето на s, като най-малко е множеството от разпределения $D'(\Omega)$ на Шварц. Както е прието, $s - sing\, supp\, u$, $u \in G_s'$ е най-малкото затворено множество в Ω, в допълнението на което u принадлежи на G^s. Понеже както в G_0^s, така и в $\mathcal{E}_s'(\Omega)$ можем да дефинираме трансформация на Фурие $\hat{u}(\xi)$ на $u(x)$, стигаме до следната основна дефиниция 2.

Дефиниция 2 [15]. Ще казваме, че $\rho^0 = (x_0, \xi^0)$, $x_0 \in \Omega$, $\xi^0 \neq 0$ не принадлежи на s-вълновия фронт на $u \in G_s{}'(\Omega)$ и ще бележим $\rho^0 \notin WF_2(u)$, ако съществуват $\varphi \in G_0^s(\Omega)$, $\varphi \equiv 1$ около x_0 и конус $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ с връх в началото и ос $O\xi^0$ и такива, че за някои константи $C > 0$, $\varepsilon > 0$ е изпълнено неравенството

$$|\widehat{\varphi u}(\xi)| \leq C e^{-\varepsilon|\xi|^{\frac{1}{s}}}, \ \ \forall \xi \in \Gamma.$$

Проекцията на $WF_s(u)$ върху Ω е точно $s - singsupp\, u$. Нововъведеното понятие позволява да изучим по-прецизно разпространението на особености на решенията на линейни хиперболични уравнения с аналитични коефициенти.

Пример 1. Нека $P_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Означаваме $\Sigma = \{(x,\ \xi): \xi_1 = 0,\ \xi \neq 0\}$. Да предположим, че $P_1 u = f, u \in G_s'(\mathbb{R}^n)$, $1 < s$, $\ \rho^0 \in \Sigma \setminus WF_s(f)$. Тогава ако $\rho^0 \in WF_s(u)$, то цялата успоредна линия на Ox_1 през т. ρ^0 се съдържа във $WF_s(u)$. Този прост пример допуска широки обобщения за разпространението на особености на така наречените оператори от реален главен тип по нулевите бихарактеристики на главния символ [15].

Нека $P(x,\ D)$ е линеен диференциален оператор с реално аналитични коефициенти. Тогава $P: G_s' \to G_s'$. Ще казваме, че P е G_s хипоелиптичен за някое фиксирано $s > 1$, ако $s - \mathrm{singsupp}\, Pu = s - \mathrm{singsupp}\, u$, $\forall u \in G_s'(\Omega)$. Ако заменим $s - \mathrm{singsupp}$ с WF_s, получаваме дефиницията на s-микролокална хипоелиптичност. Дефиницията на s-локална разрешимост на P в околност $\omega \ni x_0$ и за всяка $f \in C_0^s(\omega)$ е стандартна. Интересно е да отбележим, че ако P е t-разрешим за някое $t > 1$, то P е s-разрешим при всяко $1 < s < t$. Ще отбележим също, че операторът на Мизохата $P = \partial_{x_1} + i x_1^l \partial_{x_2}$ в $\mathbb{R}^2$, който дискутирахме в [18] в класа на Шварц D', при l четно е s-разрешим и s-хипоелиптичен за всяко $s > 1$ в т. $(0,\ x_0)$, докато при l – нечетно нито е s-разрешим, нито е s-хипоелиптичен за кое да е $s > 1$.

По-долу предлагаме два резултата, илюстриращи жевреевския подход при локалния анализ на израждащи се параболични уравнения. И така, да предположим, че операторът P не е локално разрешим в C^∞ смисъл, т.е. в класа на класическите разпределения D'. Поставяме си задачата да намерим най-голямото $s > 1$ (ако съществува), за което P е s-разрешим (след което при растене на s операторът P губи това свойство). И така, нека

$$P = \partial_t + at^p D_x^{2k} - bt^q D_x^k,\ D_x = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, a > 0, b > 0, \qquad k \in \mathbb{N}, \qquad p, q \in \mathbb{Z}_+. \tag{2}$$

Теорема 1 [17]. Нека $p > 2q + 1$ в (2). Тогава:

а) при p – четно, $\frac{p-2q-1}{p-q} < \frac{1}{k}$ операторът (2) е s-локално разрешим в началото при

$$1 < s < \frac{p-q}{k(p-2q-1)};$$

б) ако $\frac{p-2q-1}{p-q} < \frac{1}{2k}$, то (2) не е s-локално разрешим в началото при $s > 2\frac{k(p-q)}{p-2q-1}$.

Заб. 1. Нека $k = 1$ и $p > 2q + 1$. Тогава P е локално неразрешим в D'. В случая p – четно, $p \le 2q + 1$ (2) е локално разрешим в D'. В [7] е доказано, че при $k = 1$, $p > 2q + 1$ операторът (2) не е s-хипоелиптичен за всяко $s > 1$. Тук установихме s-разрешимост на (2) при $s > 1$, s достатъчно близко до 1, и s-локална неразрешимост при големи s.

Последен ще разгледаме изродения хомогенен параболичен оператор с реално-аналитични коефициенти

$$Q = \partial_t + \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(t) D_x^\alpha\,. \tag{3}$$

Теорема 2 [7]. Операторът Q не е s-хипоелиптичен в началото за всяко $1 < s < 2m$.

В редица случаи предлагаме описание на оптималния жевреевски индекс s_0 на хипоелиптичност за (3), т.е. $s_0 > 1$ е такова число, за което щом $s < s_0$ операторът Q не е s-хипоелиптичен, но е s-хипоелиптичен при $s \ge s_0$. За $Q_1 = \partial_t - \partial_x^2$ в $\mathbb{R}^2$ знаем, че $s_0 = 2$.

Пример 2. Нека $Q_2 = \partial_t + t^{2k} D_x^{2m}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$. Съгласно Теорема 2, Q_2 не е s-хипоелиптичен при $1 < s < 2m$ независимо от реда на израждане $2k$. От друга страна в [7] е показано, че Q_2 е s-хипоелитпичен в $\mathbb{R}^2$ при $s \ge 2m$, ако $k = 0$ или $k > m$. Фактът, че индексът k при $1 \le k \le m - 1$, $m \ge 2$ е изключен в Пример 2, не е странен. Наистина, Ч. Паренти и Л. Родино установиха, че Q_2 е C^∞ хипоелиптичен за всяко $k \in \mathbb{Z}_+$, но не е микролокално хипоелиптичен при $1 \le k \le m - 1$.

2. Едно интересно приложение на Жевреевския анализ, дължимо на Т. Грамчев и Г. Попов [6], е за изследване на ефективната устойчивост на многомерния билярден поток около аналитичната граница $\partial\Omega$ на строго изпъкналата ограничена област $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \ge 2$. Ефективна устойчивост на потока около $\partial\Omega$ означава устойчивост за краен, но експоненциално дълъг по времето интервал $T.e^{\frac{1}{\varepsilon^a}}$, $\varepsilon > 0$, $a > 0$. Техническият апарат, прилаган в C^∞ случая, не върви в аналитичния, защото всеки две плъзгащи се хиперповърхнини са C^∞ симплектично локално еквивалентни, но съществуват двойки от плъзгащи се хиперповърхнини, които не са симплектично еквивалентни в аналитичната категория. Горното обстоятелство налага привличането на апарат от G^2. Ще споменем в

края на абзаца за още едно приложение във физиката на Жевреевския анализ, т. нар. квазимоди. И така, да разгледаме един клас от формално спрегнати ДО P_h с жевреевски G^s коефициенти, зависещи от малкия параметър $h \in (0, h_0]$. Типичен пример е h - операторът на Шрьодингер $P_h = -h^2\Delta + V(x)$, където $V \in G^s$ е реалнозначна функция върху гладкото риманово многообразие M. Дефинираме семейството от гладки квазимоди Z на P_h като множество $\{u_m(\cdot\,; h), \lambda_m(h), m \in M_h\}$, където $u_m(\cdot\,; h) \in C_0^\infty(M)$ имат носители във фиксирана ограничена област, независеща от h и m, за всяко h множеството M_h е крайно и за всяко естествено число N съществува такава константа $C_N > 0$, за която $\|P_h u_m - \lambda_m(h) u_m\|_{L^2}$ и $\left|(u_m, u_l)_{L^2} - \delta_{m,l}\right|$ са $\mathrm{C_N} h^N$ близки за всяка двойка индекси $l, m \in M_h$. Току-що въведените квазимоди локализират със степенна точност част от спектъра на P_h около квазисобствените стойности $\lambda_m(h)$. Ще казваме, че квазимодите са в класовете на Жевре G^s, ако по-горе дефинираните приближения са с точност до $Ce^{-\frac{c}{h^s}}$, където $c, C > 0$ са константи. Съгласно спектралната теория, това позволява да се локализира част от спектъра на P_h в експоненциално малки околности на квазисобствените стойности. В серия от работи през 2000–2004 г. Г. Попов построи квазимоди за някои h – ДО в класовете на Жевре.

В дисертацията си „Нормални форми и спектрални асимптотики“ (2016) Т. Митев конструира квазимоди на формално самоспрегнати h-псевдодиференциални оператори (ПДО) от шрьодингеров тип с експоненциално малка грешка $O\left(e^{-\frac{c}{h^a}}\right)$, $a, c > 0$ – константи. За тази цел той разви и успешно приложи теорията на h – ПДО и h-интегралните оператори на Фурие в класовете на Жевре и върху жевреевски многообразия. Касае се за прецизни изследвания из областта на Жевреевския (микролокален) анализ [16].

2. Нелинейни еволюционни уравнения. Солитонни уравнения

Това е важна и интересна област на математическата физика, която особено динамично се развива след 1968 г. Още в началото ще спомена монографията [10], посветена на спектралната теория в солитонните уравнения. По-долу предлагам няколко исторически бележки. През 1968 г. бе открит метод за точното решаване на първото известно солитонно уравнение, а именно на уравнението на Кортевег-де Вриз (КДВ). То описва разпространението на водни вълни в тесни и плитки канали и се записва така: $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$. През 1971 г. беше решено и второто солитонно нелинейно уравнение – т. нар. нелинейно уравнение на Шрьодингер (НУШ), след което списъкът на солитонните уравнения започна бързо да расте. Повечето от разглежданите уравнения описват еволюцията на нелинейни вълни в едномерно пространство. Специфичното при тях е, че ефектът на дисперсията точно се компенсира от нелинейностите. Така се обяснява възможността отделния солитон да представлява устойчива нелинейна вълна, която се разпространява праволинейно и равномерно.

Каква е физичната природа на тези вълни? Това могат да бъдат водни вълни в тесни и плитки канали, плазмени вълни във вълноводи, електромагнитни вълни в оптични влакна и много други. Съответните нелинейни еволюционни ЧДУ могат да притежават както едносолитонни, така и многосолитонни решения. Тяхното изучаване разкри интересни особености на солитонните взаимодействия. Последните са чисто еластични, т.е. броят на солитоните в процеса на взаимодействието се запазва. Нещо повече, след като солитоните напуснат областта на взаимодействие, те възстановяват амплитудите и скоростта си, но възниква фазово отместване. Този ефект се обяснява с обстоятелството, че солитонните уравнения притежават безбройно много интеграли на движение. Широк кръг от учени-физици осъществиха многобройни експерименти с оптични солитони, а също така опити във физиката на плазмата и хидродинамиката. Очевидно водните вълни в природата като правило не са солитонни, но в редица случаи при подходящи начални условия уравнението КДВ и неговите естествени обобщения сравнително добре описват някои наблюдавани в моретата и океаните вълни. Солитонни вълни се появяват и при катастрофални явления, като възникването и разпространението на вълните цунами при земетресения на дъното на океана. Един от най-старите известни солитони в природата е т. нар. червено петно на Юпитер. Най-малките солитони са свързани с НУШ, наблюдавани са експериментално и размерите им се измерват с микрони.

В основата на теорията на солитоните е известното уравнение на Лакс, което изисква два обикновени диференциални оператора L и M с матрични потенциали да притежават обща система от фундаментални аналитични решения (ФАР). Това е възможно, ако потенциалите им удовлетворяват система от уравнения, която се редуцира до някое от солитонните уравнения. Споменатото уравнение на Лакс $[L,M]=0$ позволява решаването на съответното солитонно уравнение да бъде сведено до решаването на правата и обратната задача за Лаксовия оператор L, които на свой ред се редуцират до задачата на Риман-Хилберт за техните ФАР. Този факт позволява да се приложи т.нар. метод на обличането на Захаров-Шабат за построяването на солитонните решения на съответното еволюционно ЧДУ. Ще споменем само, че в гореописания процес важна роля играят Ли-алгебричните свойства на L и M, както и груповите свойства на техните ФАР.

Основен похват при получаването на нови уравнения на базата на вече известни такива е групата на редукции на Михайлов.

Открити остават въпросите колко видове солитони съществуват, какво е многомерен солитон и дали съществуват многомерни аналози на известните досега солитонни уравнения.

Ето няколко приноса на колеги-физици в горната област (вж. [4], [5], [23]). Въз основа на метода на групата на редукции на Михайлов, В. Герджиков построи в явен вид нови солитонни уравнения от семействата на КДВ и НУШ, докато в последната година В. Герджиков и А. Стефанов работят над обобщаването на метода на обличането за уравнения със $\mathbb{Z}_h$ групи на редукция. Продължава работата на В. Герджиков и А. Яновски по интерпретацията на метода на Лакс като обобщено преобразование на Фурие. Т. Вълчев и А. Яновски са установили нови резултати за диференциално-геометричните свойства на солитонните уравнения. Първият от тези автори е построил в явен вид решение на производното НУШ.

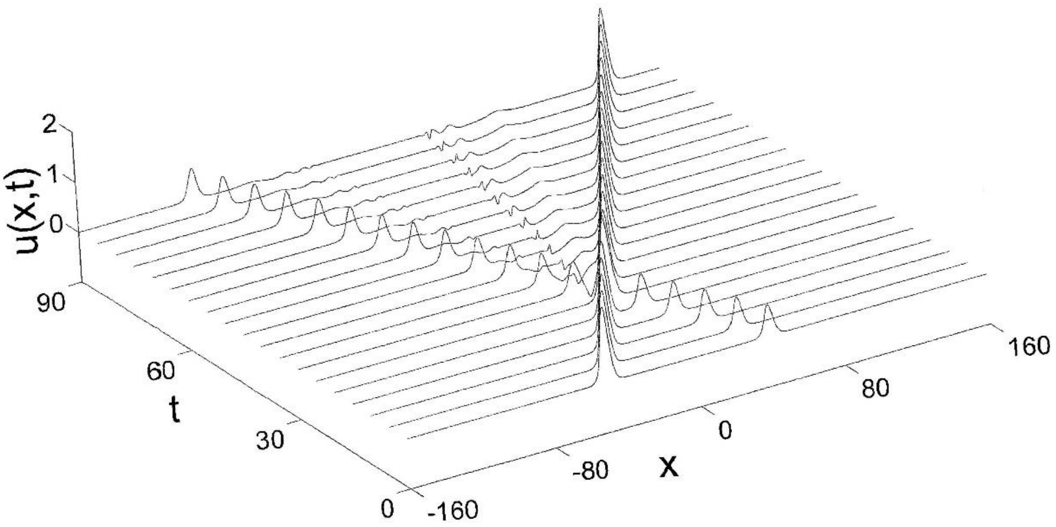
В книгата [19] са намерени в експлицитен вид формули за решенията на обобщения на уравненията на Камаса-Холм и КДВ, на Бюргерс, на Хънтер-Сакстън и др.

Малко по-подробно ще се спрем на качественото изследване на различни обобщения на уравнението на Бусинеск (1849–1929) $u_{tt}-u_{xx}+3(u^2)_{xx}+u_{xxxx}=0$, предложено от него през 1870 г. като модел на разпространение на едномерни вълни в плитки води. И така, за вълните в плитка вода имаме уравненията на КДВ и Бусинеск. Най-добрите резултати за последното уравнение са получени от Пейн и Сатингер през

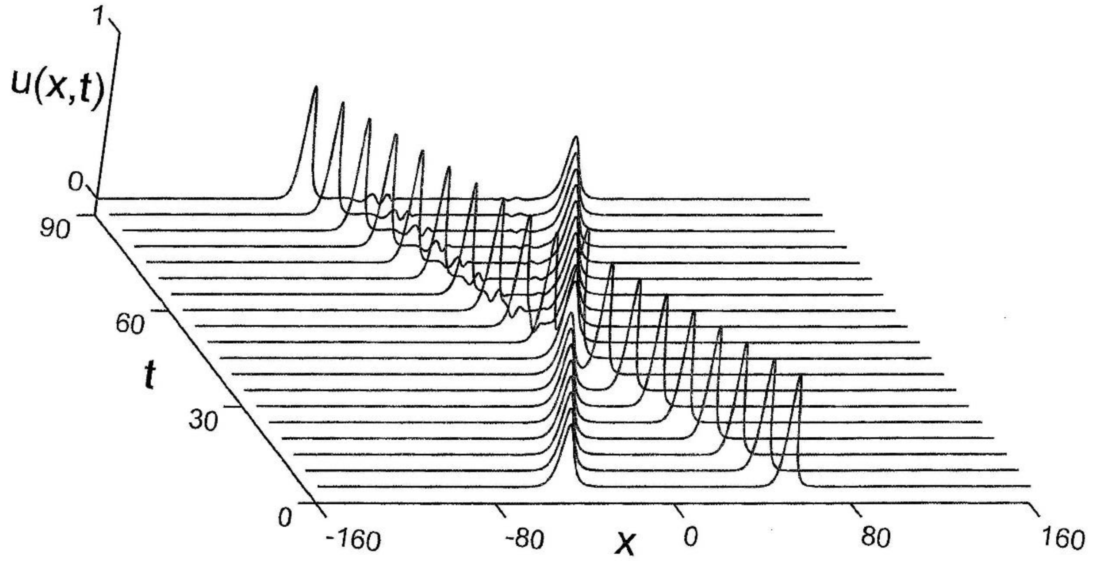
70-те – 80-те години на миналия век и са свързани с въведения от тях метод на потенциалната яма. Идеята им е да се построи потенциална яма в случай на единична степенна нелинейност, така че решенията с начални данни в ямата, чиято потенциална енергия е по-малка от височината на най-ниския проход, да останат завинаги в ямата. Очевидно в този случай решенията съществуват глобално за всяко $t \geq 0$. Минималната височина на прохода се нарича критична енергетична константа. Обратно, решенията с начални данни извън ямата и енергия, по-малка от критичната енергетична константа, не могат да проникнат в потенциалната яма и избухват за крайно време $T > 0$. Следователно е важно да се познава стойността на критичната енергетична константа. Това е направено за пръв път в [12], където авторите дават експлицитна формула за въпросната константа посредством параметрите на уравнението в случай на единична нелинейност. Нещо повече, в статията [12] и последвалите я работи е намерена формула за критичната енергетична константа в случаите на квадратично-кубична и кубично-петична нелинейност. Кубично-петичната нелинейност за т. нар. двойно дисперсно уравнение на Бусинеск намира приложение в теорията на атомните верижки и на материалите с памет. Що се отнася до двойно дисперсното уравнение на Бусинеск

$$u_{tt} - u_{xx} - h_2 u_{ttxx} + h_1 u_{xxxx} + f(u)_{xx} = 0,\ h_1 > 0, h_2 > 0,$$

с квадратично кубична нелинейност $f(u) = au^2 + bu^3$, $a > 0, b > 0$, то описва разпространението на напречни вълни в цилиндричен изотропен еластичен прът, както и разпространението на нервни импулси и вълни в цилиндрични биомембрани. В [11] са намерени всички възможни солитони за двойно-дисперсното уравнение с квадратично-кубична нелинейност и е изследвана тяхната орбитална (не)устойчивост. Най-общо казано, това означава да се изследва кога решенията на началната задача (на Коши) с данни, близки до солитона при $t = 0$, остават при нарастване на времето $t \in (0, \infty)$ в малка околност на солитона или евентуално на негова транслация. Задачата за орбитална устойчивост е подробно изучена в [11]. В следващи статии същата задача е изследвана за всички стойности на параметрите, за които солитоните се движат с положителна скорост, по-малка от 1. В [12] авторите установяват, че за широк клас от нелинейности $f(u)$ границата на приложимост на метода на потенциалните ями е доста тясна. Той върви само за начални данни с много малка положителна енергия. В [8] са посочени достатъчни структурни условия за началните данни с произволно голяма положителна енергия, за които решенията на началната задача (задача на Коши) за уравнението на Бусинеск и на двойно дисперсното уравнение избухват за крайно време. Нещо повече, в [8] за първи път е намерено необходимо и достатъчно условие за крайно избухване на решенията както на уравнението на Бусинеск, така и на уравнението на Клайн-Гордън. Взаимодействие на 2 вълни, удовлетворяващи двойно дисперсното уравнение на Бусинеск при $f(u) = u^2$ са дадени на Фиг. 1, 2. Тогава се поражда нова вълна.



Фиг. 1



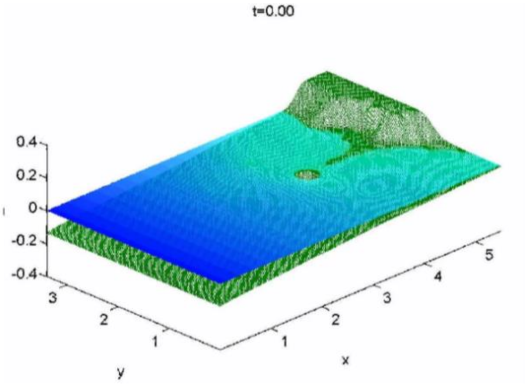
Фиг. 2

Ще отбележим също, че през 2010 г. в статия, отпечатана в *Journal of Differential Equations*, С. Хакъев, И. Илиев и К. Кирчев изучиха някои свойства на комплексното модифицирано КДВ уравнение, в което нелинейността има вида $6|u|^2u_x$ вместо $6uu_x$. Те изследваха орбиталната устойчивост на семейство от периодично разпространяващи се (бягащи) вълни. Тя е налице при т.нар. случаи на ляв (десен) осцилатор на Дъфинг.

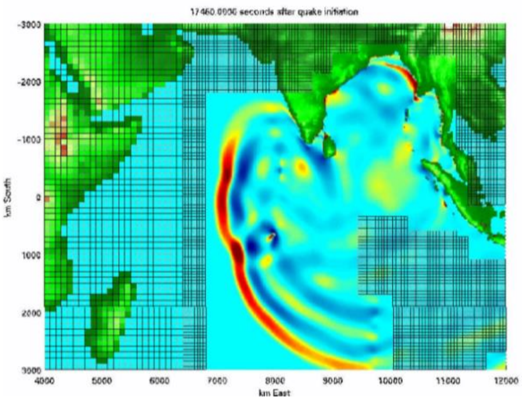
Всичките уравнения, които разгледахме, са нелинейни, но локални. Редица процеси във физиката, например в нелинейната квантова механика, се описват с нелокални уравнения и следователно се излиза извън рамките на солитонните решения. Ще споменем само за уравнението на Шокар-Пекар, описващо модела на Фрьолих и Пекар на поларона, където свободни електрони в йонна решетка взаимодействат с фотони, асоциирани с деформациите на решетката. При моделирането на еднокомпонентна плазма през 1976 г. Ф. Шокар въведе нелокалното уравнение, което сега носи неговото име. Докато в лявата страна на обобщеното уравнение на Шокар стои операторът на Лаплас $\Delta + \omega$, $\omega > 0$, то в дясната стои $A(u)|u|^{p-2}u$, $2 < p < \frac{7}{3}$, където A

е нелинеен нелокален оператор – интегрален оператор в $\mathbb{R}^3$ – с полярно ядро $\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|y|}-\frac{1}{|x-y|}\right)$, действащ върху $|u(y)|^p$. В [3] е доказано, че обобщеното уравнение на Шокар не притежава нетривиални H^1 радиални решения. За пълнота ще споменем, че решенията на обобщеното уравнение на Шокар могат да бъдат свързани с решенията на класическата система на Шрьодингер-Нютон.

Вече говорихме за вълните цунами, а сега ще споменем и проблема, който те пораждат: изучаване на цунами от тяхното малко смущение на морското равнище до размера, с който те достигат до брега. Накратко, необходимо е да се създаде подходящ математически модел, който да описва вълната от момента на нейното възникване, през разпространението, до превръщането ѝ в разрушителна природна сила. Редица предишни разглеждания показват, че еволюцията на цунами от пораждането до достигането на района на брега достатъчно добре се характеризира с някои моделни нелинейни ЧДУ.



Фиг. 3.



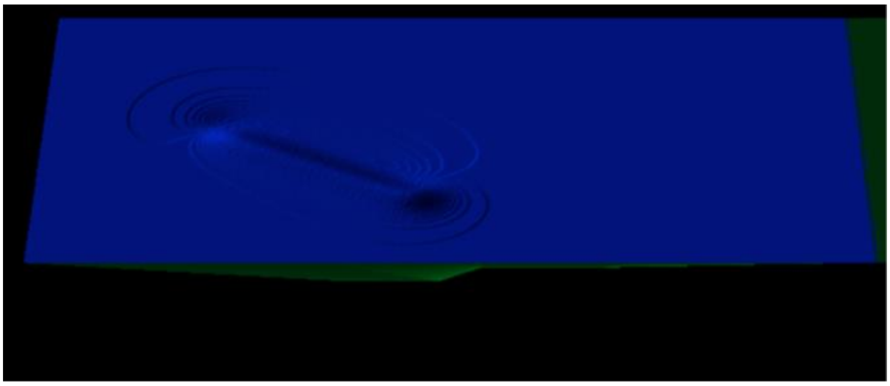
Фиг. 4. *Цунами в Индийския океан 2004 г.*

Един такъв модел, описващ нелинейното разпространение на вълната с плоска свободна повърхност, се задава с нелинейното вълново уравнение

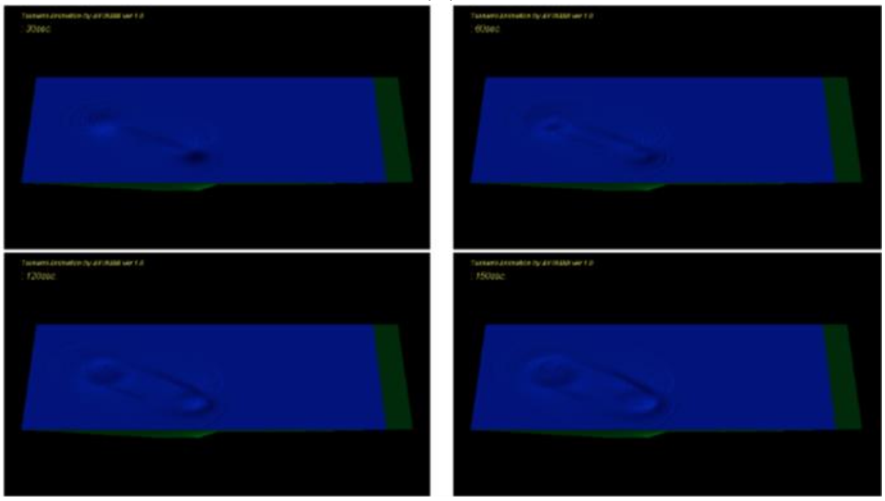
$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}=-f(x), f(\varphi)=\begin{cases}\varphi-\varphi|\varphi|^{-\frac{1}{2}} \text{ за } \varphi\neq 0\\ 0, \qquad \varphi=0\end{cases}$$

И така, профилът на вълната се запазва и тя се движи с приблизително постоянна скорост недалече от брега. В определен момент линейният модел избухва и когато вълната навлезе в плитките води се налага използването на други уравнения, които описват разпространението на дълги вълни при променлива дълбочина. От физична гледна точка по-бързият вълнов фронт настига по-бавния и това води до рязко увеличаване на амплитудата на вълната.

Очевидно не е възможно да се намерят в общия случай точните решения на ЧДУ, моделиращи цунами. За тази цел в изследванията се използват клетъчно-невронните мрежи (КНМ).



(a)



(b)

Фиг. 5. *Симулации на вълни цунами с КНМ: (а) Началната вълна; (б) Разпространение на началната вълна в различно време*

Този подход позволява да се изучат различни математически модели на вълните цунами [14], [21], а също така на уравненията КДВ и Камаса-Холм, на двукомпонентната система на Камаса-Холм (вж. монографията [22]) и др. Динамиката на тези модели е изследвана чрез КНМ, като за целта те се дискретизират с подходящ грид. По-долу предлагаме няколко фигури, илюстриращи теоретичните модели и тяхната числена реализация с КНМ и наблюдаваните събития при вълните цунами: Фиг. 3, 4 и 5.

3. Приложение на елиптичните ЧДУ в механика на твърдото тяло

1. През 2014 г. беше публикувана монографията [9]. Целта ѝ беше да анализира динамичното поведение на хомогенни и функционално подредени пиезоелектрични материали с дефекти (пукнатини и инклузии), както и да оцени полето на напрежения във върховете на пукнатината и периметъра на инклузията. Основните приложения на изследванията са в материалознанието, в механика на разрушенията и в

безразрушителния контрол. Двумерният математически модел в честотната област се състои от 3 ЧДУ от втори ред на анизотропната еластичност и електрическата квазистатика за компонентите на механичното преместване и електрическия потенциал в област с вътрешна граница – несамопресичаща се отворена крива (за пукнатина) и изпъкнала линия (за инклузия) със зададени гранични условия. Горната задача се свежда до система от интегродиференциални уравнения върху границата на дефекта и съществуващите граници в разглежданата област, която се решава числено с метода на граничните интегрални уравнения. Важно за сходимостта на числения метод е отчитане на априорното поведение на решението около върха на пукнатината, което следва от някои резултати на Кондратиев за поведението на решенията на елиптични ЧДУ в области с ъглови точки.

2. Наскоро излезе книгата [13], която е посветена на разпространението на сеизмични вълни в нехомогенни еластични и пороеластични среди и предлага аналитични и числени решения за гранични задачи в двумерно полупространство с пукнатини и каверни. Математическият модел представлява гранична задача за двумерната система на изотропната и анизотропната еластичност в честотна област – две елиптични ЧДУ от 2 ред в полупространство, съдържащо дефекти: пукнатини, инклузии и отвори. Гореспоменатата гранична задача е еквивалентна на система от сингулярни интегро-диференциални уравнения върху дефектите, върху свободната повърхност и върху наличните граници в разглежданата област. За да се осъществи въпросната редукция, се строят с преобразованието на Радон фундаментални решения за някои специални нехомогенни области, а с трансформацията на Фурие са построени подходящи функции на Грийн. Намирането на неизвестните величини върху линията на дефектите и върху границите в областта позволява да се получи интегрално представяне на напрегнато-деформираното състояние във всяка точка на наблюдение в полупространството, където е разположена геоложката среда.

4. Кооперативни елиптични и параболични системи

През 1927 г. Е. Хопф (1902–1983) предложи принципа за максимума в общоприетата сега форма. Това стимулира многобройни изследвания за валидността му за скаларни линейни и квазилинейни елиптични и параболични уравнения и др. Отбелязани са и безспорни успехи за кооперативните системи с гладки коефициенти. В последното направление принос имат Н. Кутев и Г. Бояджиев. В свои съвместни работи те са доказали принцип за сравнение за дифракционната задача за кооперативни квазилинейни елиптични и параболични системи [1], а напоследък и за некооперативни параболични системи. Н. Кутев има резултати относно принципа за сравнение на вискозните решения, а Г. Бояджиев намери необходими и достатъчни условия за валидност на принципа за сравнение в комплицирания случай на некооперативни елиптични системи [2]. За тази цел той използва спектралните свойства на системата.

Принципът за сравнение дава възможност да се приложи метода на горното и долното решения за построяване на решения на съответната система. В [20] е доказано локално съществуване на класическо решение на система ЧДУ от диференциалната геометрия, която се свежда до квазилинейна некооперативна елиптична система.

Дифракционните задачи за (не)кооперативни системи от ЧДУ описват някои химически процеси, като например реакцията на Михаелис-Ментен и др.

Литература

[1] G. Boyadzhiev, N. Kutev, Diffraction problems for quasilinear reaction-diffusion systems, Nonlinear Analysis, 55, 2003, 905–926.

[2] G. Boyadzhiev, Comparison principle for non-cooperative elliptic systems, Nonlinear Analysis, TMA, 69:41, 2008.

[3] V. Georgiev, G. Venkov, Optimal interpolation constant for the generalized Schrödinger-Newton system, Pliskam vol. 25, 2015, 19–28.

[4] V. Gerdjikov, G. Vilasi, A. Yanovski, Integrable Hamiltonian hierarchies. Spectral and geometrical methods, Lecture Notes in Physics, vol. 748, Springer, 2008.

[5] V. Gerdjikov, A. Stefanov, New types of two component NLS-type equations, Pliska Studia Math. Bulg., vol. 26, A. Slavova (guest editor), 2016, 52–66.

[6] T. Gramchev, P. Popivanov, Partial differential equations. Approximate solutions in scales of functional spaces, Math. Res. Series, vol. 108, Wiley-VCH, 2000.

[7] T. Gramchev, P. Popivanov, M. Yoshino, Critical Gevrey index for hypoellipticity of parabolic equations and Newton polygons, Ann. Mat. Pura Appl. 170 (1996), 103–131.

[8] M. Dimova, N. Kolkovska, N. Kutev, Blow up of solutions to ordinary differential equations arising in nonlinear dispersive problems, Electronic Journal of Differ. Equations, vol. 2018, (2018), No. 68, pp. 1–16.

[9] P. Dineva, D. Gross, R. Müller, T. Rangelov, Dynamic fracture of piezoelectric materials, Solutions of time harmonic problems via BIEM, Solid Mech. and Appl., vol. 212, Springer, 2014.

[10] I. Iliev, E. Christov, K. Kirchev, Spectral methods in soliton equations, John Wiley & Sons, NY, 1991.

[11] N. Kolkovska, M. Dimova, N. Kutev, Stability or instability of solitary waves to double dispersion equation with quadratic-cubic nonlinearity, Math. and Computers in Simulation, vol. 133, 2017, 249–264.

[12] N. Kutev, N. Kolkovska, M. Dimova, Global existence to generalized Boussinesq equation with combined power-type nonlinearities, J. Math. Anal. Appl., vol. 410, 2014, 427–444.

[13] G. Manolis, P. Dineva, T. Rangelov, F. Wuttke, Seismic wave propagation in non-homogeneous elastic media by boundary elements, Solid Mech. and Appl., vol. 240, Springer, 2017.

[14] M. Markova, A. Slavova, Modeling tsunami waves via CNN approach, Proceedings BGSIAM, 2010.

[15] M. Mascarello, L. Rodino, Partial differential equations with multiple characteristics, Akademie Verlag, Berlin, 1997.

[16] T. Mitev, Gevrey quasimodes associated with Kronecker invariant tori, C. R. Acad. Bulg. Sci., 66:10, 2013, 1373–1379.

[17] A. Oliaro, P. Popivanov, Gevrey local solvability for degenerate parabolic operators of higher order, Operator theory, Advances and Appl., vol. 172, Birkhäuser, 2006, 135–151.

[18] П. Попиванов, Поглед върху развитието на диференциалните уравнения през последните 40 години и българското присъствие в тях, Списание на БАН, година CXX, кн. 6, 2007, 75–82.

[19] P. Popivanov, A. Slavova, Nonlinear waves. An Introduction, World Scientific, 2011.

[20] P. Popivanov, G. Boyadzhiev, Y. Markov, Solvability in classical sense of quasilinear non-cooperative elliptic systems and application, Pliska Stud. Math. 26, 2016, 165–176.

[21] A. Slavova, P. Zecca, Applications of equations of mathematical physics in studying tsunami waves, Pliska Studia Math. Bulg., vol. 23, 2014, 159–174.

[22] A. Slavova, P. Zecca, Modelling natural phenomena via cellular nonlinear networks, Cambridge Scholars Publishing, 2017.

[23] A. Yanovski, T. Valchev, Pseudo-Hermitian reduction of a generalized Heisenberg ferromagnet equation I. Auxiliary system and fundamental properties, Journal of nonlinear mathematical physics, 25:2, 2018, 324–350.

Aspects of the development of the differential equations in the Institute of Mathematics and Informatics of BAS during the last decade.

Petar Popivanov

This paper deals with several achievements of the Section of differential equations and mathematical physics of the Institute of Mathematics and Informatics of the Bulgarian Academy of Sciences attained the last decade. More precisely, at first we discuss some problems from the domain of Gevrey microlocal analysis and its applications to the effective stability for the multidimensional billiard flow and for constructing of quasimodes. Then we consider several nonlinear evolution partial differential equations /PDE/ and specially soliton type PDE, where new equations of the type KdV and NLS are found into explicit form. Generalizations of the Boussinesq equation and Cauchy problem for them as well as interaction of two waves are studied too. CNN numerical approach is used in the investigation of some nonlinear wave equations describing the propagation the tsunami waves and in the study of variants of KdV and Camassa–Holm equations. Several applications of the theory of the elliptic systems of PDE and the method of boundary integral equations to the solid body mechanics for materials with defects as cracs and inclusions are also proposed. At the end of the paper some new results on the cooperative elliptic and parabolic systems of PDE are formulated. They describe some geometrical and chemical problems and the authors prove existence results. The paper is illustrated by figures of nonlinear waves corresponding to Boussinesq equation, respectively to tsunami waves.

Акад. проф. дмн Петър Р. Попиванов
1113 София
ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
Институт по математика и информатика при БАН