Хармонични почти комплексни структури

Йохан Давидов, Олег Мушкаров*

Статията е обзор върху резултати, свързани с проблема кога съвместима почти комплексна структура върху Риманово многообразие е хармонично сечение или хармонично изображение от многообразието в неговото туисторно пространство.

2010 *Класификация на математическите области*: основна 53C43, вторична 58E20, 53C28

Ключови думи: почти Ермитови структури, твисторни пространства, хармонични изображения

1. Увод

Централен въпрос в съвременната диференциална геометрия е намирането на „най-добрите“ геометрични обекти върху гладко многообразие. Този въпрос е подробно изучен за Риманови структури, като в този случай за най-добри се считат Римановите метриките с постоянна секционна кривина или с постоянна кривината на Ричи (Айнщайнови метрики). Според класическата теорема на Килинг-Хопф [15, 14] универсалното накритие на всяко свързано пълно Риманово многообразие с постоянна секционна кривина е изометрично на хиперболично пространство, Евклидово пространство или на сфера, което свежда класификацията на тези многообразия до алгебричната задача за описание на обобщените кристалографски групи [30]. Класификацията на компактните многообразия допускащи Айнщайнови метрики е далеч от завършване, като най-съществените резултати в тази насока са получени при допълнителни геометрични и/или топологични условия [3]. Трудноста на тази задача се вижда и от резултати на Кочик [18], които показват, че съществуването на Айнщайнова метрика върху компактно многообразие зависи от неговата гладка структура. Въпросът за намирането на най-добрите Риманови структури върху комплексни многообразия е изследван най-пълно за Келерови многообразия. В този случай е завършена класификацията на компактните Келерови многообразия с постоянна холоморфна секционна кривина [17] и е решен въпросът за съществуване на Ермитови Айнщайнови метрики върху комплексни повърхнини [26, 20]. В по-високи размерности класификационни резултати са получени при допълнителни геометрични условия [3]. В тази насока трябва да се отбележи и известната хипотеза на Калаби, която гласи, че за всяка затворена $(1,1)$-форма ρ, представяща първия клас на Чърн на компактно Келерово многообразие, във всеки Келеров клас съществува единствена Келерова метрика с форма на Ричи ρ. Тази хипотеза е доказана от Яу [31] през 1977 г. и има важни приложения в теорията на алгебричните многообразия и математическата физика.

Почти комплексните структури са въведени от Ересман и Хопф в края на 40-те години на миналия век във връзка с решаването на въпроса кога едно гладко многообразие допуска комплексна структура. Да напомним, че почти комплексна структура върху гладко многообразие е ендоморфизъм J на допирателното разслоение, за който $J^2 = -Id$. През 1993 г. Е. Калаби и Х. Глук [5] поставят въпроса за намиране на „най-добрите“ почти комплексни структури върху Риманово многообразие (N,h), които са h-ортогонални. Те предлагат за такива да се считат структурите J, за които образът $J(N)$ на N в туисторното пространство $\mathcal{Z}$ на (N,h) има минимален обем относно

* Авторите са частично подпомогнати от Фонд „Научни изследвания“, Министерство на науката и образованието на България, договор ДН 12/2.

една естествена Риманова метрика върху $\mathcal{Z}$. Нещо повече, те доказват, че стандартната почти комплексна структура върху 6-мерната сфера $\mathbb{S}^6$, дефинирана чрез числата на Кели, може да се характеризира с това свойство.

Теорията на хармоничните изображения дава обща платформа за определяне на „най-добрите“ елементи в даден хомотопен клас от геометрични обекти. Мотивиран от тази теория, К. Ууд [28, 29] разглежда като „оптимални“ почти комплексните структури, които разглеждани като сечения на туисторното разслоение са критични точки на функционала на енергията при вариации чрез сечения. В общия случай тези критични точки не са хармонични изображения и в литературата са известни като „хармонични сечения“ [28] или „хармонични почти комплексни структури“ [29].

Статията е обзор върху резултати, свързани с проблема кога съвместима почти комплексна структура върху Риманово многообразие е хармонично сечение или хармонично изображение от многообразието в неговото туисторно пространство. Тази тематика се разработва активно през последните 10 години в секция „ Анализ, геометрия и топология“ на Института по математика и информатика, БАН.

2. Хармонични сечения на туисторното разслоение

Една почти комплексна структура върху Риманово многообразие (N,h) се нарича почти Ермитова (или съвместима с метриката h) ако е h-ортогонална. Ако едно Риманово многообразие притежава Ермитова структура, то притежава много такива структури(виж [9]), поради което възниква въпроса за намиране на критерии, които отличават някои от тези структури. Естествен начин за получаване на такъв критерий е разглеждането на почти Ермитовите структури върху (N,h) като сечения на неговото *туисторно разслоение* $\pi: \mathcal{Z} \to N$, чийто слой в точка $p \in N$ се състои от всички h-ортогонални комплексни структури $J_p: T_pN \to T_pN$ върху допирателното пространство на N в точката p. Слоят на туисторното разслоение е компактното Ермитово симетрично пространство $O(2m)/U(m)$, $2m = dim\, N$, и неговата стандартна метрика $h^v = -\frac{1}{2} Trace\, J_1 \circ J_2$ е Келер-Айнщайнова. Ако многообразието N е ориентирано, туисторното пространство $\mathcal{Z}$ има две свързани компоненти $\mathcal{Z}_+$ и $\mathcal{Z}_-$, които се наричат положително и отрицателно туисторно пространство на (N,h); техните сечения са почти Ермитовите структури, определящи съответно дадената или противоположната ориентация на N. Туисторното разслоение $\mathcal{Z}$ може да се разглежда като подразслоение на векторното разслоение $A(TN)$ на h-антисиметричните ендоморфизми на TN, снабдено със свързаността, индуцирана от свързаноста на Леви-Чивита на базата (N,h). Тази свързаност определя разлагане на допирателното разслоение на $\mathcal{Z}$ на хоризонтално и вертикално подразслоение и това дава възможност да се дефинира естествена 1-параметрична фамилия от Риманови метрики $h_t, t > 0$, върху $\mathcal{Z}$, а именно

$$h_t(X_J^h + U, Y_J^h + V) = h(X,Y) + th^v(U,V),$$

където $X, Y \in T_{\pi(J)}N$, $U, V \in \mathcal{V}_J$, и както обикновено $X_J^h = (\pi_*|\mathcal{H}_J)^{-1}(X)$, $Y_J^h = (\pi_*|\mathcal{H}_J)^{-1}(Y)$ са хоризонталните повдигания в точка $J \in \mathcal{Z}$ на допирателните вектори X, Y.

Нека J е почти Ермитова структура върху (N,h), разглеждана като изображение $J: (N,h) \to (\mathcal{Z}, h_t)$. Функционалът на енергията върху относително компактно отворено подмножество $D \subseteq N$ е интегралът

$$E_D(J) = \int_D \|J_*\|^2_{h,h_t} vol,$$

където нормата е взета относно метриките h и h_t. Да отбележим, че $J_*X = \nabla_X J + X^h$ за всеки допирателен вектор $X \in TN$, където $\nabla_X J$ е вертикалната част на J_*X и

$$||J_*||^2_{h,h_t} = t||\nabla J||^2_h + (dim\, N)vol(D).$$

Следователно критичните точки на функционала на енергията E_D съвпадат с тези на вертикалния енергиен функционал

$$J \to \int_D ||\nabla J||^2_h vol$$

и не зависят от избора на параметъра t. Ясно е също така, че Келеровите структури са абсолютни минимуми на функционала на енергията. Уравненията на Ойлер-Лагранж за критичните точки на функционала на енергията при вариации със сечения на туисторното разслоение са получени от К.Ууд.

Теорема 1. ([28, 29]) *Една почти Ермитова структура J е хармонично сечение тогава и само тогава, когато*

$$[J, \nabla^* \nabla J] = 0,$$

където ∇^* е формално спрегнатият оператор на ∇.

По-долу са дадени примери на не-Келерови почти Ермитови структури, които са хармонични сечения на туисторното разслоение.

- Стандартната приблизително Келерова структура върху $\mathbb{S}^6$.
- Почти комплексната структура на Калаби-Екман върху произведение на нечетномерни сфери $\mathbb{S}^{2p+1} \times \mathbb{S}^{2q+1}$ с метриката произведение.
- Симплектичната структура на Търстън-Абена [1, 27] върху компактни фактори на групата на Ли $\mathbb{H} \times \mathbb{S}^1$, където $\mathbb{H}$ е 3-мерната реална група на Хайзенберг.
- Комплексната структура на многообразие на Ивасава (компактен фактор на комплексната група на Хайзенберг по дискретна подгрупа).

Ще отбележим, че Келеровите структури не са единствените абсолютни минимуми на функционала на енергията. Достатъчни условия осигуряващи това свойство са получени в [4].

Теорема 2. *Нека (N, h, J) е компактно почти Ермитово многообразие, за което:*

(1) $dim\, N = 4$, метриката h е антиавтодуална и почти Ермитовата структура (h, J) е Ермитова или почти Келерова;

(2) $dim\, N \geq 6$, метриката h е конформно плоска и почти Ермитовата структура (h, J) е от класа $\mathcal{W}_1 \oplus \mathcal{W}_4$ на Грей-Хервела [13].

Тогава почти комплексната структура J е абсолютен минимум на фукционала на енергията.

Забележка. За дефинициите на автодуална и антиавтодуална Риманова метрика върху ориентирано 4-мерно многообразие виж следващия параграф.

По-долу са дадени примери на не-Келерови почти Ермитови структури, които са абсолютни минимуми на функционала на енергията.

- Антиавтодуалните Ермитови структури върху раздувания $(S^3 \times S^1)\sharp n\overline{\mathbb{CP}^2}$ на повърхнината на Хопф $S^3 \times S^1$, построени от К. Льо Брун в [19].

- Според резултати на И. Ким [16] следните раздувания притежават антиавтодуални почти Келерови структури:
    - $\mathbb{CP}^2 \# n\overline{\mathbb{CP}^2}$, където $\mathbb{CP}^2$ е комплексното проективно пространство и $n \geq 11$;
    - $(\mathbb{S}^2 \times \Sigma)\# n\overline{\mathbb{CP}^2}$ и $(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{T}^2)\# n\overline{\mathbb{CP}^2}$, където $\mathbb{S}^2$ е двумерната сфера, Σ е произволна Риманова повърхнина с род ≥ 2, $\mathbb{T}^2$ е двумерен тор и $n \geq 6$;
- Стандартната Ермитова структура върху многообразието на Хопф $\mathbb{S}^{2p+1} \times \mathbb{S}^1$ е конформно плоска и локално конформно Келерова, т.е. от клас $\mathcal{W}_4$ на Грей-Хервела [13].

3. Хармоничност на почти комплексните структури на Атия-Хитчин-Зингер и Иилс-Саламон

Туисторната теория е създадена от английския физик Р. Пенроуз като възможен подход към квантовата гравитация [22, 23, 24]. От математическа гледна точка нейната основна идея е, че конформната геометрията на Риманово многообразие може да се закодира в холоморфната геометрия на неговото туисторно пространство. Идеите на Пенроз са развити в контекста на Римановата геометрия от Атия, Хитчин и Зингер [2], които в 4-мерния случай дефинират естествена почти комплексна структура върху туисторното пространство. По-късно тяхната конструкция е обобщена за по-високи размерности от различни автори. Д. Иилс и С. Саламон [12] дефинират друга почти комплексна структура върху туисторното пространство, която използват за конструиране на хармонични изображения. Тези структури се означават традиционно с $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ и се дефинират по следния начин. За хоризонтални допирателни вектори на $\mathcal{Z}$ полагаме $\mathcal{J}_1(X_J^h) = \mathcal{J}_2(X_J^h) = (JX)_J^h$ за $J \in \mathcal{Z}$ и $X \in T_{\pi(J)}N$. Върху вертикалното пространство $\mathcal{V}_J$ структурата на Атия, Хитчин и Зингер $\mathcal{J}_1$ съвпада с комплексната структура на слоя $\mathbb{S}^2$ на $\mathcal{Z}$ през J, докато структурата на Иилс и Саламон $\mathcal{J}_2$ съвпада със спрегнатата комплексна структура на $\mathbb{S}^2$. И двете почти комплексни структури $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ са съвместими с метриките h_t върху $\mathcal{Z}$. Условието за интегруемост на почти комплексната структура $\mathcal{J}_1$ е намерено от Атия, Хитчин и Зингер [2]. За да формулираме техния резултат, ще напомним, че кривинният оператор $\mathcal{R}: \Lambda^2 TN \to \Lambda^2 TN$ на Риманово многообразие (N, h) се дефинира по следния начин:

$$h(\mathcal{R}(X_1 \wedge X_2), X_3 \wedge X_4) = h(R(X_1, X_2)X_3, X_4), \quad X_1, X_2, X_3, X_4 \in TN,$$

където R е кривинния тензор на (N, h) и в лявата страна на горното равенство h е индуцираната метрика върху $\Lambda^2 TN$.

Да означим с $\mathcal{B}$ и $\mathcal{W}$ ендоморфизмите на $\Lambda^2 TM$ определени съответно от безследния тензор на Ричи и конформния тензор на Вайл. Ако s е скаларната кривин на метриката h, то

$$\mathcal{R} = \frac{s}{12} Id + \mathcal{B} + \mathcal{W}.$$

Да предположим сега, че N е 4-мерно ориентирано многообразие. Тогава операторът на Ходж е инволюция на $\Lambda^2 TN$ и имаме ортогонално разлагане

$$\Lambda^2 TN = \Lambda^2_+ TN \oplus \Lambda^2_- TN,$$

където $\Lambda^2_\pm TN$ е подразслоението на $\Lambda^2 TN$ отговарящо на собствената стойност ± 1 на оператора на Ходж. Операторът $\mathcal{B}$ изпраща $\Lambda^2_\pm TN$ в $\Lambda^2_\mp TN$, докато $\mathcal{W}$ запазва всяко от разслоенията $\Lambda^2_\pm TN$. Нека $\mathcal{W} = \mathcal{W}_+ + \mathcal{W}_-$, където $\mathcal{W}_\pm = \mathcal{W}$ върху $\Lambda^2_\pm TN$ и $\mathcal{W}_\pm = 0$ върху $\Lambda^2_\mp TN$. По този начин получаваме известното неприводимо разлагане на оператора на кривината под действието на групата $SO(4)$, доказано от Зингер и Торп [25]:

$$\mathcal{R} = \frac{s}{12} Id + \mathcal{B} + \mathcal{W}_+ + \mathcal{W}_-.$$

Римановото многообразие (N, h) е Айнщайново, ако $\mathcal{B} = 0$ и е локално конформно плоско, ако $\mathcal{W} = 0$. То се нарича автодуално (антиавтодуално), ако $\mathcal{W}_- = 0$ ($\mathcal{W}_+ = 0$). Ще отбележим, че смяната на ориентацията на многообразието N сменя ролите на $\mathcal{W}_+$ и $\mathcal{W}_-$.

Теорема 3. ([2]) *Почти комплексната структура $\mathcal{J}_1$ върху положителното туисторно пространство $\mathcal{Z}_+$ е интегруема тогава и само тогава, когато базовото многообразие (N, h) е антиавтодуално.*

От друга страна имаме следния резултат за $\mathcal{J}_2$.

Теорема 4. ([12]) *Почти комплексната структура $\mathcal{J}_2$ върху $\mathcal{Z}_+$ никога не е интегруема.*

Следващата теорема дава геометричните условия за хармоничност на почти комплексните структури на Атия-Хитчин-Зингер и Иилс-Саламон, разглеждани като сечения на положителното туисторно разслоение. Тя може да се интерпретира като вариационно условие за антиавтодуалност.

Теорема 5. ([8]) *Нека (N, h) е ориентирано 4-мерно Риманово многообразие и нека $(\mathcal{Z}_+, h_t)$ е положителното туисторно пространство. Тогава:*
(i) *Почти комплексната структура на Атия-Хитчин-Зингер $\mathcal{J}_1$ е хармонично сечение тогава и само тогава, когато (N, h) е антиавтодуално многообразие.*
(ii) *Почти комплексната структура на Иилс-Саламон $\mathcal{J}_2$ е хармонично сечение тогава и само тогава, когато (N, h) е антиавтодуално многообразие с постоянна скаларна кривина.*

Ще напомним, че едно хармонично сечение J се нарича стабилно, ако втората вариация на интеграла на енергията е неотрицателна за всички деформации на J чрез сечения на туисторното пространство с компактен носител. Различни достатъчни условия за стабилност на хармонични сечения са получени от К. Ууд в [29]. От тях следва, че ако (N, h, J) е Ермитово косимплектично ($\delta J = 0$) многообразие и J е хармонично сечение, то това сечение е стабилно, ако образът $\mathcal{R}(\Omega)$ на Келеровата форма Ω чрез кривинния оператор е неотрицателна (1,1)-форма. Нещо повече, при тези условия J е абсолютен минимум на функционала на енергията. Използвайки тези условия, в [8] са построени редица примери на стабилни хармонични сечения върху автодуални Айнщайнови многообразия с неотрицателна скаларна кривина и върху многообразия, които локално са изометрични на $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$. Интересен нерешен проблем е дали свързаните суми $2\mathbb{CP}^2$ и $3\mathbb{CP}^2$ притежават автодуални метрики, за които съответните (1,1)-форми $\mathcal{R}(\Omega_t)$ върху положителните им туисторни пространства са неотрицателни.

Игнорирайки структурата на разслоение на туисторното пространство $\mathcal{Z}$ можем да разгледаме почти Ермитовите структури, които са критични точки на функционала на енергията при вариации чрез всички гладки изображения от N в $\mathcal{Z}$. Тези структури са истински хармонични изображения от (N, h) в $(\mathcal{Z}, h_t)$ и препоръчваме на читателя книгата [11] за основни факти за такива изображения. Тук ще напомним само, че едно гладко изображение между Риманови многообразия $f: (N, h) \to (M, g)$ е хармонично, когато следата на втората му фундаментална форма е нула. Тази форма се дефинира по следния начин. Нека $f^{-1}TM$ е „издърпаното“ чрез f разслоение TM. Тогава диференциала $f_*: TN \to TM$ е сечение на разслоението $Hom(TN, f^{-1}TM) \to N$. Нека $\nabla^{(f)}$ е свързаността върху $f^{-1}TM$, индуцирана от свързаността на Леви-Чивита върху TM. Тези две свързаности определят свързаност $\tilde{\nabla}$ върху разслоението $Hom(TN, f^{-1}TM) \to N$. По дефиниция, втората фундаментална форма на f е симетричната формата $(\tilde{\nabla}_X f_*)(Y)$, $X, Y \in TN$, която приема стойности в $f^{-1}TM$. Изображението f е хармонично тогава и само тогава, когато $Trace\, \tilde{\nabla} f_* = 0$. То е тотално геодезично, ако $\tilde{\nabla} f_* = 0$.

Разглеждайки почти комплексните структури на Атия-Хитчин-Зингер и Иилс-Саламон от гледна точка на теорията на хармоничните изображения имаме следната класификационна теорема.

Теорема 6. ([10]) *Почти комплексната структура на Атия-Хитчин-Зингер или тази на Иилс-Саламон върху положителното туисторно пространство $\mathcal{Z}_+$ на ориентирано 4-мерно Риманово многообразие (N, h) определя хармонично изображение тогава и само тогава, когато многообразието (N, h) е антиавтодуално и Айнщайново или локално то е произведение на отворен интервал в $\mathbb{R}$ и* 3*-мерно Риманово многообразие с постоянна кривина.*

Ще отбележим, че в горната теорема многообразията от втория вид са локално конформно плоски. Те не са Айнщайнови, освен в случая, когато 3-мерното Риманово многообразие е плоско и тогава са Ричи плоски. Теоремата показва също, че аналогично на случая за хармонични сечения (Теорема 5) условията за $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ да са хармонични изображения не зависят от параметъра t на метриката h_t. При тези условия, взимайки специални стойности на t се получават почти Ермитови структури върху $\mathcal{Z}_+$ с интересни геометрични свойства. (вж. [7, 6, 21]).

4. Хармонични почти комплексни структури върху 4-мерни Риманови многообразия

Нека (N, h) е 4-мерно Риманово многообразие с почти Ермитова структура J. Снабдявайки N с ориентацията, определена от J, можем да разглеждаме J като гладко изображение от (N, h) в положителното туисторно пространство $(\mathcal{Z}_+, h_t)$ и да поставим въпроса кога това изображение е хармонично сечение или хармонично изображение. Както е добре известно в размерност 4 има три базисни класа от почти Ермитови структури според класификацията на Грей-Хервела [13]: Келерови, Ермитови и почти Келерови (симплектични) структури. Ще отбележим, че за Келерово многообразие (N, h, J) (от произволна размерност) изображението $J: (N, h) \to (\mathcal{Z}_+, h_t)$ е тотално геодезично изометрично влагане. За да формулираме съответните резултати за Ермитови и почти Келерови структури, ще напомним, че $*$-Ричи тензорът на почти Ермитово многообразие (N, h, J) се дефинира по следния начин

$$\rho^*(X, Y) = Trace\{Z \to R(JZ, X)JY\}.$$

Нека ρ е тензорът на Ричи на метриката h,

$$\rho(X, Y) = Trace\{Z \to R(X, Z)Y\}.$$

Означаваме с $\mathcal{N}$ тензора на Ньоенхойс на J, който се дефинира с равенството

$$\mathcal{N}(X, Y) = -[X, Y] + [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y].$$

Този тензор е антисиметричен и по-долу ще го разглеждаме също като изображение от $\Lambda^2 TN$ в TN. Нека $\Omega(X, Y) = h(JX, Y)$ е Келеровата 2-форма на почти Ермитовото многообразие (N, h, J). Означаваме с B векторното поле върху N, което е дуално на формата на Ли $\theta = -\delta\Omega \circ J$ относно метриката h. Накрая, нека $\Lambda_0^2 TN$ е подразслоението на $\Lambda_+^2 TN$, което е ортогонолно на J, т.е. $\Lambda_0^2 T_p N = \mathcal{V}_{J(p)}$. При тези означения са в сила следните резултати.

Теорема 7. ([9]) *Нека J е интегруема почти комплексна структура. Тогава изображението $J: (N, h) \to (\mathcal{Z}_+, h_t)$ е хармонично тогава и само тогава, когато $d\theta$ е* (1,1)*-форма и $\rho(X, B) = \rho^*(X, B)$ за всяко $X \in TM$.*

Да напомним, че едно почти Ермитова многообразие се нарича почти Келерово ако Келеровата му 2-форма е затворена.

Теорема 8. ([9]) *Нека* (N,h,J) *е* 4*-мерно почти Келерово многообразие. Тогава изображението* $J:(N,h)\to(\mathcal{Z}_+,h_t)$ *е хармонично тогава и само тогава, когато* $*$*-Ричи тензорът* ρ^* *е симетричен и*

$$Trace\,\{\Lambda_0^2TM \ni \tau \to R(\tau)(\mathcal{N}(\tau))\} = 0.$$

Доказателствата на тези резултати и на Теорема (6) са основани на безкоординатна формула за втората фундаментална форма на една почти комплексна структура, разгледана като изображение от съответното многообразие в неговото туисторно пространство. От нея следва, че J е хармонично сечение тогава и само тогава, когато вертикалната част на следата на втората фундаментална форма е нула. Тази бележка заедно с доказателствата на Теореми 7 и 8 дава следните условия за хармоничност на J като сечение:

Теорема 9. ([9]) *Изображението* $J:(N,h)\to(\mathcal{Z}_+,h_t)$*, дефинирано от интегруема почти комплексна структура* J *върху* (N,h)*, е хармонично сечение тогава и само тогава, когато* 2*-формата* $d\theta$ *е от тип* (1,1).

Теорема 10. ([9]) *Изображението* $J:(N,h)\to(\mathcal{Z}_+,h_t)$*, дефинирано от почти Келерова структура* J *върху* (N,h)*, е хармонично сечение тогава и само тогава, когато* $*$*-Ричи тензорът* ρ^* *е симетричен.*

В [9] са дадени редица примери на почти комплексни структури, които са хармонични сечения или хармонични изображения, включително и на такива, които са хармонични сечения, но не са хармонични изображения.

Литература

[1] E. Abbena, *An example of an almost Kähler manifold which is not Kählerian*, Boll. Un. Mat. Ital. A(6) **3** (1984), 383-392.

[2] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, I. M. Singer, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry*, Proc. Roy. Soc. London, Ser.A 362 (1978), 425-461.

[3] A. Besse, *Einstein manifolds*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, 2008.

[4] G. Bor, L. Hernández-Lamoneda, M. Salvai, *Orthogonal almost-complex structures of minimal energy*, Geom. Dedicata **127** (2007), 75-85.

[5] E. Calabi, H. Gluck, *What are the best almost-complex structures on the 6-sphere?*, Proc. Sym. Pure Math. **54** (1993), part 2, 99-106.

[6] J. Davidov, G. Grantcharov, O. Mushkarov, *Twistorial examples of* $*$*-Einstein manifolds*, Ann. Glob. Anal. Geom. **20** (2001), 103-115.

[7] J. Davidov, O. Mushkarov, *On the Riemannian curvature of a twistor space*, Acta Math. Hungarica **58** (1991), 319-332.

[8] J. Davidov, O. Mushkarov, *Harmonic almost-complex structures on twistor spaces*, Israel J. Math. **131** (2002), 319-332.

[9] J. Davidov, A. Ul Haq, O. Mushkarov, *Almost complex structures that are harmonic maps*, J. Geom. Phys. (2017), DOI:10.1016/j.geomphys.2017.09.010; arXiv:1504.01610v3 [math.DG]

[10] J. Davidov, O. Mushkarov, *Harmonicity of the Atiyah-Hitchin-Singer and Eells-Salamon almost complex structures*, Annali Mat. Pura Appl. (2017), DOI:10.1007/s10231-017-0675-y; arXiv:1611.06496v2 [math.DG] 22 Nov 2016.

[11] J. Eells, L. Lemaire, *Selected topics in harmonic maps*, Cbms Regional Conference Series in Mathematics, vol. **50**, AMS, Providernce, Rhode Island, 1983.

[12] J. Eells, S. Salamon, *Twistorial constructions of harmonic maps of surfaces into four-manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser.IV, 12 (1985), 589-640.

[13] Gray, L. M. Hervella, *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants*, Ann. Mat. Pure Appl. **123** (1980), 288–294.
[14] H. Hopf, *Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem*, Math. Ann. **95** (1926), 313–339
[15] W. Killing, *Ueber die Clifford-Klein'schen Raumformen*, Math. Ann. **39** (1891), 257–278.
[16] Kim, *Almost Kähler anti-self-dual metrics*, Ph.D. thesis, Stony Brook University, May 2014, available at www.math.stonybrook.edu/alumni/2014-Inyong-Kim.pdf; see also arXiv:1511.07656v1 [math.DG] 24 Nov 2015.
[17] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, **2** John Wiley and Sons, 1969
[18] D. Kotschick, *Einstein Metrics and Smooth Structures*, Geom. Topol. **2**(1998), 1–10.
[19] C. LeBrun, *Anti-self-dual hermitian metrics on blow-up Hopf surfaces*, Math. Ann. **289** (1991), 383-392.
[20] C. LeBrun, *On Einstein, Hermitian 4-Manifolds*, J. Diff. Geom. **90**(2012), 277-302.
[21] O. Muškarov, *Structures presque hermitienes sur espaces twistoriels et leur types*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér.I Math. **305** (1987), 307-309.
[22] R. Penrose, *Twistor theory, its aims and achievements*, in Quantum Gravity, an Oxford symposium, Clarendon Press, Oxford, 1975, pp. 268-407.
[23] R. Penrose, R.S. Ward, *Twistors for flat and curved space-time*, in General Relativity and Gravitation (A.Held, ed.), vol.2, Plenum Press, New York-London, 1980, pp. 283-328.
[24] R. Penrose, *Physical space-time and non-realizable CR-structures*, Bull. Amer. Math. Soc. **8** (1983), 427-448.
[25] M. Singer, J. A. Thorpe, *The curvature of* 4-*dimensional Einstein spaces*, in Global Analysis. Papers in Honor of K. Kodaira, University of Tokyo Press, Princeton University Press, 1969, pp. 355-365.
[26] G. Tian, S.-T. Yau, *Kähler-Einstein metrics on complex surfaces with* $c_1 > 0$, Comm. Math. Phys., **112** (1987,175–203.
[27] W. P. Thurston, *Some simple examples of symplectic manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), 467-468.
[28] C. M. Wood, *Instability of the nearly-Kähler six-sphere*, J. reine angew. Math. **439** (1993), 205-212.
[29] C. M. Wood, *Harmonic almost-complex structures*, Compositio Mathematica **99** (1995), 183-212.
[30] Wolf, *Spaces of constant curvature*, Sixth edition, 2010, Chelsea Publishing, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island
[31] S.-T. Yau, *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, PNAS, **74**(1977), 1798-1799.

Harmonic almost-complex structures

Johann Davidov, Oleg Mushkarov

Abstract. In this survey we review some old a new results on the problem when a compatible almost complex structure on a Riemannian manifold is a harmonic section or a harmonic map from the manifold into its twistor spaces.

Проф. дмн Йохан Давидов,
чл.-кор. Олег Мушкаров
1113 София, ул. „Акад. Г. Бончев", бл. 8
Институт по математика и информатика при БАН