Алгебрата и алгебричната геометрия
в Института по математика и информатика при БАН

Веселин Дренски

Много класически области на математиката, като разпределението на нулите на полиномите, които до средата на миналия век се считаха за дял от алгебрата, днес се разглеждат като част от математическия анализ. Най-общо казано, счита се, че съвременната „абстрактна“ алгебра изучава свойствата на алгебричните структури – множества с операции, които удовлетворяват системи от аксиоми. Целта на тази статия е да представи някои от успехите, получени от сътрудниците на Института по математика и информатика в областта на алгебрата и свързаната с нея алгебрична геометрия.

Една от първите задачи, изучавани в алгебрата, е решаването на алгебричните уравнения в радикали. Най-старият пример за това е добре известната формула

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

за корените на квадратното уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

След като през Средновековието са били намерени формули за решаването на алгебричните уравнения от трета и четвърта степен, усилията на алгебристите са били хвърлени в търсене на подобни формули за уравненията от по-висока степен. Едва на границата на XVIII и XIX век е доказано, че за общото алгебрично уравнение от степен $n \geq 5$ такава формула не съществува. (Това е прочутата теорема на Абел-Руфини, формулирана през 1799 г. и доказана напълно през 1824 г.) Следващата важна стъпка е теорията на Галоа, създадена през 1830 г. от 18-годишния Еварист Галоа. Ако

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0,\ a_0 \neq 0,$$

е алгебрично уравнение с коефициенти от поле K (например K е полето на рационалните числа), то съществува по-голямо поле E, наречено поле на разлагане на уравнението $f(x) = 0$, в което уравнението има n корена $x_1, \dots, x_n$. Разглежданията могат лесно да се редуцират до случая, когато уравнението няма кратни корени, т.е. всичките му корени са различни и е неразложимо, т.е. полиномът $f(x)$ не се представя като произведение на два полинома от по-ниска степен с коефициенти от същото поле K. Теорията на Галоа съпоставя на уравнението $f(x) = 0$ група $G(f)$, която е подгрупа на групата от взаимно-еднозначни изображения на множеството $\{x_1, \dots, x_n\}$ от корените в себе си. Уравнението $f(x) = 0$ има решение в радикали тогава и само тогава, когато неговата група $G(f)$ е „разрешима“ и това свойство може да се разпознае ефективно чрез пресмятания в групата.

Несъмнено теорията на Галоа е един от най-красивите дялове на алгебрата, който дава завършен отговор на основен проблем – как да познаем дали могат да се намерят в явен вид решенията на едно алгебрично уравнение. Но в тази теория има множество все още нерешени трудни задачи, които продължават да бъдат актуални и в наши дни. Неслучайно, първите изследвания по абстрактна алгебра в България са по теория на Галоа. През 1954 г. Йордан Дуйчев [7] намира условия, при които, тръгвайки от два неразложими полинома с цели коефициенти $f(x)$ и $\varphi(x)$, съществува константа M такава, че полиномът $f(x) + M\varphi(x)$ е отново неразложим над полето на рационалните числа. По-късно той публикува още няколко статии, в които се разглежда разрешимостта на уравненията в радикали, а в [9] той изучава междинните полета на разширения на Галоа.

На Йордан Дуйчев принадлежи и първата българска статия в областта на съвременната комутативна алгебра [8]. Той дава елементарно доказателство на известната теорема, че във всяко крайно разширение на полето на рационалните числа съществуват безбройно много прости идеали от първа степен. В частност, оттук се получава ново доказателство, без използване на дзета-функции, за съществуването на безбройно много прости числа във всяка аритметична прогресия от вида $nx + 1$.

Темата за разрешимост на алгебричните уравнения в радикали продължава в творчеството на Иван Байчев. В [1] той дава достатъчни условия за разрешимост в радикали без теория на Галоа и теория на групите, като използва получени преди това от Йордан Дуйчев аналози за полета на теоремите на Силов. На Иван Байчев принадлежат и първите български изследвания по теория на групите [2] и [3].

Съществена роля за развитието на българската алгебра има Кирил Дочев, който има големи заслуги за университетското преподаване на съвременната алгебра в България. Неговите основни научни интереси са в област, която днес се счита за част от математическия анализ. Заедно с Петър Бърнев [4] той е и един от авторите на модифицирания метод на Нютон за приближено решаване на алгебрични уравнения. Но Кирил Дочев е автор и на статията [5], в която се дава пълно описание на квадратичните алгебри, т.е. на асоциативните алгебри над поле, в които всеки елемент е решение на квадратно уравнение.

През 60-те и началото на 70-те години на миналия век в Института постъпват на работа няколко млади завършили Софийския университет алгебристи, които значително разширяват тематиката на изследванията по алгебра в България, измежду които най-ярка следа оставят Владимир Чуканов (комутативна алгебра и теория на модулите) и Михаил Гаврилов (алгебри с полиномни тъждества). По-късно към тази група се присъединяват и учениците на Михаил Гаврилов – Любомир Давидов, Иван Тонов и Ангел Попов. (По-подробна информация за Йордан Дуйчев, Иван Байчев, Владимир Чуканов и за други български математици, починали преди 1987 г. може да се намери в книгата [10], чиято онлайн версия е достъпна от страницата http://mmib.math.bas.bg/ на Музея на математиката и информатиката в България.)

През 1970 г. Математическият институт с изчислителен център и Факултетът по математика и механика на Софийския университет се интегрират в Единния център по математика и механика (ЕЦММ), който просъществува до 1988 г. Въвежда се Моделът на тристепенната система на университетско образование , която две десетилетия по-късно е възприета в цяла Европа (бакалавърска програма в Блок А, магистърска програма в Блок В и докторска програма в Блок С). Силен тласък на развитието на алгебрата в ЕЦММ дава завръщането в България на редица млади математици, получили своето образование или защитили своите дисертации в Московския държавен университет под ръководството на световно известни учени – Георги Генов (теория на групите с научен ръководител Олег Головин), Лъчезар Аврамов (комутативна и хомологична алгебра с научен ръководител Евгений Голод), Гроздена Тодорова (формални групови закони) и Андрей Тодоров (алгебрична геометрия), и двамата ученици на Игор Шафаревич, Стойчо Якимов (теория на групите с научен ръководител Алексей Кострикин). Заедно с тях към сектор „Алгебра“ в ЕЦММ работят и завършилите в България Керопе Чакърян (теория на групите), Калчо Тодоров (теория на полугрупите), Стефан Додунеков (основал българската школа по теория на кодирането) и др. По-късно още няколко млади алгебристи от Института защитиха своите дисертации в Московския университет – Татяна Гатева (с научен ръководител

Виктор Латишев), Веселин Дренски (с научен ръководител Юрий Бахтурин), Васил Кънев и Атанас Илиев (с научен ръководител Василий Исковских) , Иван Чипчаков (с научен ръководител Алексей Панчишкин). Към сектор „Алгебра“ се присъединиха и Валентин Илиев (ученик на Андрей Тодоров), Даниела Николова-Попова (ученичка на Георги Генов), Георги Томанов (защитил дисертация в Института по математика на Белоруската национална академия на науките под ръководството на Владимир Платонов) и Иван Пенков (дипломирал се в Московския университет и защитил дисертация в Математическия институт „Стеклов“ в Москва с научен ръководител Юрий Манин). В последните десетина години групата от алгебристи се разрастна с включването на Христо Илиев (защитил дисертация в Република Корея под ръководството на Чанго Ким), Петър Далаков и Вилислав Бучакчиев (защитили дисертации в САЩ, съответно под ръководството на Тони Пантев и Людмил Кацарков), Елица Христова (защитила дисертация в Германия под ръководството на Иван Пенков), а съвсем неотдавна и Петър Данчев (защитил дисертация в Института). Неотдавна в Института постъпиха на работа Любомир Борисов и немският алгебрист Йорг Копиц.

Днес много от алгебристите в Института са учени със световна известност. През 80-те и 90-те години на миналия век част от тях се преместиха в редица престижни научни центрове в чужбина. Със задоволство ще отбележим, че въпреки това те не прекъснаха връзката си с Института и продължават активното си сътрудничество с българските си колеги.

В момента повечето от алгебристите в Института работят в секция „Алгебра и логика“. Без да претендираме за изчерпателност, ще се спрем накратко на някои постижения от последните години.

Научните интереси на Иван Чипчаков са в областта на теория на полетата и крайномерните алгебри с деление (които са естествени обобщения на алгебрата на кватернионите). В теорията на полетата на всяко поле E се съпоставя неговата група на Брауер $\mathrm{Br}(E)$, която описва свойствата на централните крайномерни алгебри над това поле. В последните няколко години основните резултати на Иван Чипчаков са свързани с изучаването на свойствата на групата на Брауер за различни класове от полета, вж. напр.[20–22].

Близки по тематика са и интересите на Любомир Борисов. В съвместната статия с Асен Божилов [13] той изучава елементите от крайно поле, минималните полиноми на които са от специален вид, като в доказателствата се използват техники, типични за аналитична теория на числата.

Даниела Николова-Попова работи в областта на компютърната теория на групите. В много от своите изследвания тя активно използва системата GAP за пресмятания в теория на групите. Например, в две от последните си статии [38, 58] тя и съавторите ѝ определят най-малкия брой подгрупи, които могат да покрият симетричните групи от малък ред и някои от спорадичните крайни прости групи.

Елица Христова защитава своята докторска дисертация по теория на представянията на безкрайномерните обобщения на класическите групи и алгебри на Ли. Тя продължава тази тематика и днес. В [43] тя описва правилата за разлагане на тензорните произведения на модули над такива групи. В [44] тя, съвместно с Иван Пенков, обобщава класическата теорема на Бот–Борел–Вейл и получава описанието на разлагането на кохомологиите на векторните разслоения на хомогенни ind-пространства.

Не са много учените от Западна Европа, които постъпват на постоянна работа в БАН. Едно такова приятно изключение е Йорг Копиц, който в момента е един от най-активно работещите алгебристи в ИМИ. Неговите интереси са в теория на полугрупите от преобразования на множества – описание на полугрупите, състоящи се от преобразования със специални свойства и на релациите в тях, на максималните подполугрупи и други основни за теорията проблеми, вж например [11, 33, 60, 61].

След като защити своята докторска дисертация в ИМИ, в секцията постъпи Петър Данчев. Той е активно работещ млад математик с интереси в структурната теория на пръстените. Както е известно, в теория на пръстените се разглеждат класове от пръстени със зададени свойства на техните елементи – нил- и нилпотентни пръстени, регулярни пръстени, булеви пръстени и др. В своите изследвания Петър Данчев разглежда уточнения на свойствата или обобщения на класически класове от пръстени, както и връзките между отделните класове, вж. например [Da1–Da4].

Основните научни интереси на Татяна Гатева-Иванова са в теорията на уравнението на Янг-Бакстер, където тя е един от признатите лидери в областта. В математиката често разменяме местата на различни обекти в даден алгебричен израз. Преди години тази операция беше формулирана като нетривиално линейно изображение наречено сплитане, което удовлетворява т.н. „съотношения на плитките“ или уравнението на Янг-Бакстер. Тази операция се оказа ключова за революциите в две области: в математическата физика (където уравнението на Янг-Бакстер е в основата на едно ново „квантово“ понятие за симетрия – понятието квантова група) и в теория на възлите (за конструкцията на инварианти в теорията на възлите). Теоретико-множествените решения на уравнението на Янг-Бакстер формират интересна среща на математическата физика, алгебрата и комбинаториката. Всяко такова решение е зададено от двойка (X,r), където X е множество и $r : X \times X \to X \times X$ е изображение, което удовлетворява съотношенията на плитките. И в двете области (квантови групи и теория на възлите), беше постигнат значителен прогрес. Изследването на решенията на уравнението на Янг-Бакстер на нивото на множества и комбинаторика беше предложено като задача от Филдсовия лауреат Владимир Дринфелд през 1991 г. и се активизира забележително през последните две десетилетия. Татяна Гатева-Иванова изучава чисто математическата теория на такива обекти и тяхното приложение в некомутативната алгебрична геометрия (регулярните алгебри на Артин и Шелтър), в теорията на сплетените групи и сплетените моноиди и в комбинаториката. Много от нейните резултати са получени съвместно с изтъкнати специалисти в областта и публикувани в авторитетни международни издания, вж. например [17, 18] и [40–42].

Тук ще отбележим и резултатите, получени през последните години от Валентин Илиев, който от алгебричен геометър се преквалифицира в областта на представянията на групите и нейните приложения в математическата химия [52], в теорията на групите на плитките [53] и в приложенията на математиката в икономиката [54].

Теорията на алгебрите с полиномни тъждества (PI-алгебрите) е една от първите области на съвременната алгебра, разработвани в Института. Главна заслуга за това имат Михаил Гаврилов и Георги Генов, който след завръщането си в България смени тематиката си и се присъедини към групата, създадена от Михаил Гаврилов. Обзор за постиженията на българската школа по алгебрите с полиномни тъждества преди 2007 г. е представен в [6]. В момента в тази област работят Веселин Дренски, Силвия Бумова от секция „Математически основи на информатиката“ и присъединилата се към тях Елица Христова в тясно сътрудничество с млади български математици, работещи у нас и в чужбина и с утвърдени чуждестранни математици.

Една от основните задачи на теорията на PI-алгебрите е количествената оценка на полиномните тъждества. Обикновено това се изразява с т.н. редици от кохарактери и коразмерности. Оказа се, много от проблемите могат успешно да се решават с методите, разработени в началото на XX век от Елиът [37] и МакМахон [59] за решаването на линейни диофантови уравнения и неравенства. Тези методи бяха модифицирани и доразвити. Освен комбинаторна теория на пръстените, алгебрична комбинаторика, аритметика и математически анализ, в изследванията бяха използвани и пресмятания с компютри, което наложи създаването на нови алгоритми и разработването на специфичен софтуер. Оказа се , че методите намират много по-широко приложение, не само в теория на PI-алгебрите, но и в класическата и некомутативната теория на инвариантите. Представи за получените резултати могат да се получат от обзорната статия на Франческа Бенанти, Силвия Бумова, Веселин Дренски, Георги Генов и Пламен Коев [12], за приложенията в изучаването на PI-алгебрите – в [36], в класическата теория на инвариантите – в [35], в некомутативната теория на инвариантите – в [31] и [34]. Бяха намерени и връзки на получените чисто теоретични резултати с други области на математиката и нейните приложения. В статията [CDEKK] на Чан, Дренски, Еделман, Кан и Коев бяха разработени методи за бързо пресмятане на хипергеометрични функции на матричен аргумент. Такива пресмятания намират приложения в геномиката, безжичните комуникации, финансите, разпознаването на образи и др.

Една от областите, тясно свързани с алгебрата, е алгебричната геометрия. Без съмнение, това е област от математиката, преживяла най-значима трансформация в хода на своето развитие – от геометричните методи, използвани за пресмятания в античността до модерните абстрактни алгебрични техники от XX и XXI век за решаването на геометрични и други проблеми. Тази класическа област на математиката е преминала в течение на вековете през многократно разширение, преосмисляне и преопределяне на своите основни задачи и обекти. Може да се каже, че първоначално алгебричната геометрия изучава множествата от нулите на системи от полиномни уравнения. Основните теми на изучаване са: класификация на геометричните обекти, трансформациите им, морфизмите и съответствията между тях, техните инварианти, теория на особеностите и пресичанията на алгебричните многообразия, въпросите за разширение на скаларите и „разширение на пространството“ – преминаване от разглеждания в афинно пространство към изучаване на обектите в проективно пространство и по-късно към произволни абстрактни многообразия и схеми. Съвременната алгебрична геометрия заема централно място в математиката и има дълбоки връзки с други области като комплексния анализ, теорията на числата, топологията и диференциалните уравнения. Тя намира приложения в статистиката, теория на управлението, роботиката, криптографията, теорията на струните и т.н.

Сътрудниците на ИМИ имат богат опит и традиции в областта на алгебричната геометрия. Може да се каже, че развитието на алгебричната геометрия в България започва с работите на Андрей Тодоров. Неговите резултати по деформации на многообразия на Калаби–Яу днес са считани от международната математическа общност за крайъгълен камък в областта на огледалната симетрия и математичната физика.

Интересите на Валентин Илиев в алгебричната геометрия са свързани с теория на повърхностите, [49–51]. Резултатите му изясняват структурата и класификацията на повърхнините от геометричен род 3.

Васил Кънев работи в областта на алгебричнитие криви, абелевите многообразия и пространствата на Хурвиц. Неговата работа [55] е основополагаща за цяла една тематика, свързваща спектралните криви, полупростите алгебри на Ли, абелевите многообразия и интегрируемите системи. Тази работа оказва влияние и върху изследванията по разслоения на Хигс и математична физика през последните двадесет години, и това влияние може да се проследи в работите на Рон Донаги, Еял Маркман, Тони Пантев и Людмил Кацарков. Понастоящем Васил Кънев изследва геометрията на пространствата на Хурвиц, параметризиращи накрития на Галоа на гладки проективни криви. В частност, той изучава въпросите за унирационалността [56] и неприводимите компоненти [57] на тези пространства.

Атанас Илиев работи в областта на бирационалната алгебрична геометрия и по-конкретно в областта на хиперкелеровите многообразия и многообразията на Фано [32, 45], както и многообразия от висока размерност, техните модули и теория на Ходж [39]. Сред неговите основни резултати са редица нови и интересни примери за съществуването на алгебрични интегруеми системи. Неговата работа [46] е първата съдържаща геометрично описание на нетривиално многообразие от модули на векторни разслоения над тримерни многообразия на Фано.

Основните интереси на Христо Илиев са свързани с изясняването на структурата Хилбертовата схема, параметризираща гладки интегрални криви в комплексното проективно пространство. Работите му [47] и [48] съдържат резултати за неприводимост на Хилбертовата схема при определени стойности на инвариантите. В работите му [23] и [24] се показва съществуването, за определени стойности на инвариантите, на допълнителни компоненти елементите на които са криви лежащи върху линейчати повърхнини. В [24] е даден първият пример за съществуването на регулярни компоненти различни от тъй наречения отличителен компонент на Хилбертовата схема.

Интересите на Петър Далаков са в областта на теория на деформациите, неабелевата теория на Ходж и пространствата от модули на разслоения на Хигс. В [25] се разглежда изображението на Хитчин от гледна точка на алгебрите от тип L_∞ и диференциално-градуираните алгебри на Ли. В [16], съвместно с Уго Бруцо, е описана кубиката на Донаги–Маркман за обобщената система на Хитчин. В [26] са обсъдени някои текущи разработки и е направен преглед на основни резултати за модули на разслоения на Хигс.

Интересите на Вилислав Бучакчиев са в областта на смесените структури на Ходж върху стекове на Брил–Ньотер [14] и неабелевата смесена теория на Ходж [15].

Авторът изказва своята дълбока благодарност на Христо Илиев и Петър Далаков за помощта при написването на частта за алгебричната геометрия

Литература:

[1] И. Байчев, Разрешими с радикали алгебрични уравнения, Известия на Мат. институт 9 (1966), 147-149.
[2] И. Байчев, О циклической группе порядка p^2, Доклады БАН 20 (1967), № 2, 85-88.
[3] И. Байчев, Върху крайните циклични групи, Год. СУ, Матем. фак. 60 (1967), 223-228.
[4] П. Бырнёв, К. Дочев, О некоторых модификациях метода Ньютона для приближенного решения алгебраических уравнений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 4 (1964), № 5, 915–920.
[5] К. Дочев, Квадратични алгебри, Известия на Мат. институт 11 (1970), 247-255.
[6] В. Дренски, Алгебри с полиномни тъждества и българският принос към тях, Списание на БАН 120 (2007), № 6, 34-41.
[7] Й. Дуйчев, Върху неразложимостта на полиномите, Год. СУ, Физ.-матем. фак. 48 (1954), № 1, 27-32.
[8] Й. Дуйчев, О простых идеалах первой степени, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 7 (1956), 71-73.
[9] Й. Дуйчев, Върху делителите на нормалните полета, Год. СУ, Матем. фак. 57 (1964), 335-337.
[10] И. Чобанов, П. Русев (съставители), Български математици, София, Народна просвета, 1987.

[11] A. Anantayasethi, J. Koppitz, Green's relations on a semigroup of sets of transformations with restricted range. C. R. Acad. Bulg. Sci. 70 (2017), No. 12, 1621-1626.
[12] F. Benanti, S. Boumova, V. Drensky, G. K. Genov, P. Koev, Computing with rational symmetric functions and applications to invariant theory and PI-algebras. Serdica Math. J. 38 (2012),Nos 1-3, 137–188.
[13] L. Borissov, A. Bojilov, Enumeration of the elements of GF(3^m) with prescribed trace and co-trace, Proc. Forty-sixth Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Borovets, April 9-13, 2017, 151-155.
[14] V. Boutchaktchiev, Nonabelian mixed Hodge structure on Brill-Noether stacks, arXiv:1310.5649 [math.AG].
[15] V. Boutchaktchiev, Local mixed Hodge structure on Brill-Noether stacks, arXiv:1310.5648 [math.AG].
[16] U. Bruzzo, P. Dalakov, Donagi-Markman cubic for the generalised Hitchin system, Int. J. Math. 25 (2014), No. 2, Article ID 1450016, 20 p.
[17] F. Cedó, T. Gateva-Ivanova, A. Smoktunowicz, On the Yang-Baxter equation and left nilpotent left braces, J. Pure Appl. Algebra 221 (2017), No. 4, 751-756.
[18] F. Cedó, T. Gateva-Ivanova, A. Smoktunowicz, Braces and symmetric groups with special conditions, J. Pure Appl. Algebra 222 (2018), No. 12, 3877-3890.
[19] C. Chan, V. Drensky, A. Edelman, R. Kan, P. Koev, A linear-time algorithm for evaluating series of Schur functions, Journal of Algebraic Combinatorics (to appear).
[20] I. D. Chipchakov, Lower bounds and infinity criterion for Brauer *p*-dimensions of finitely-generated field extensions, C. R. Acad. Bulg. Sci. 66 (2013), No. 7, 923-932.
[21] I. D. Chipchakov, On the behaviour of Brauer *p*-dimensions under finitely-generated field extensions, J. Algebra 428 (2015), 190-204.
[22] I. D. Chipchakov, On Brauer *p*-dimensions and absolute Brauer *p*-dimensions of Henselian fields, J. Pure Appl. Algebra 223 (2019), No. 1, 10-29.
[23] Y. Choi, H. Iliev, S. Kim, Reducibility of the Hilbert scheme of smooth curves and families of double covers, Taiwanese J. Math. 21 (2017), No. 3, 583-600.
[24] Y. Choi, H. Iliev, S. Kim, Components of the Hilbert scheme of smooth projective curves using ruled surfaces, arXiv:1807.05137 [math.AG].
[25] P. Dalakov, On the *L*-infinity description of the Hitchin map, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste 46 (2014), 1-17.
[26] P. Dalakov, Lectures on Higgs moduli and abelianisation, J. Geom. Phys. 118 (2017), 94-125.
[27] P. V. Danchev, A note on weakly exchange and weakly clean rings, Kumamoto J. Math. 30 (2017), 1-6.
[28] P. V. Danchev, Weakly semi-Boolean unital rings, J. Algebra Number Theory Appl. 39 (2017), No. 3, 261-276.
[29] P. V. Danchev, Uniqueness in π-regular unital rings, J. Math., Tokushima Univ. 51 (2017), 1-4.
[30] P. Danchev, Generalizing nil clean rings, Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin 25 (2018), No. 1, 13-28.
[31] R. Dangovski, V. Drensky, Ş. Fındık, Weitzenböck derivations of free metabelian associative algebras, J. Algebra and its Applications, 16, No. 3, Article ID 1750041, 26 p. (2017).
[32] O. Debarre, A. Iliev, L. Manivel, Special prime Fano fourfolds of degree 10 and index 2, Recent Advances in Algebraic Geometry, LMS LNS 417, 2015, 123-155.
[33] I. Dimitrova, V. H. Fernandes, J. Koppitz, A note on generators of the endomorphism semigroup of an infinite countable chain, J. Algebra Appl. 16 (2017), No. 2, Article ID 1750031, 9 p.

[34] M. Domokos, V. Drensky, Rationality of Hilbert series in noncommutative invariant theory, International J. Algebra and Computations 27 (2017), No. 7, 831–848.
[35] V. Drensky, E. Hristova, Invariants of symplectic and orthogonal groups acting on GL(n,$\mathbb{C}$)-modules, arXiv:1707.05893 [math.AC].
[36] V. Drensky, B. Kostadinov, Cocharacters of polynomial identities of block triangular matrices, Commun. in Algebra 45 (2017), No. 5, 2127-2141.
[37] E. B. Elliott, On linear homogeneous diophantine equations. Quart. J. Pure Appl. Math. 34 (1903), 348–377.
[38] M. Epstein, S. S. Magliveras, D. Nikolova-Popova, The covering numbers of $\mathbb{A}_9$ and $\mathbb{A}_{11}$, J. Combin. Math. Combin. Comput. 101 (2017), 23–36.
[39] D. Favero, A. Iliev, L. Katzarkov, On the Griffiths groups of Fano manifolds of Calabi-Yau Hodge type. Pure Appl. Math. Q. 10 (2014), No. 1, 1-55.
[40] T. Gateva-Ivanova, Quadratic algebras, Yang-Baxter equation, and Artin-Schelter regularity, Adv. Math. 230 (2012), No. 4-6, 2152-2175.
[41] T. Gateva-Ivanova, G. Fløystad, Monomial algebras defined by Lyndon words, J. Algebra 403 (2014), 470-496.
[42] T. Gateva-Ivanova, Set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation, braces and symmetric groups, Adv. Math. 338 (2018), 649-701.
[43] E. Hristova, Branching laws for tensor modules over classical locally finite Lie algebras, J. Algebra 397 (2014), 278-314.
[44] E. Hristova, I. Penkov, Decomposition of cohomology of vector bundles on homogeneous ind-spaces, C. R. Acad. Bulg. Sci. 70 (2017), No. 7, 907-916.
[45] A. Iliev, G. Kapustka, M. Kapustka, K. Ranestad, Hyper-Kähler fourfolds and Kummer surfaces, Proc. LMS (3), 115 (2017), No. 6, 1276-1316.
[46] A. Iliev, D. Markushevich, The Abel-Jacobi map for a cubic threefold and periods of Fano threefolds of degree 14, Doc. Math. 5 (2000), 23-47.
[47] H. Iliev, On the irreducibility of the Hilbert scheme of space curves, Proc. Amer. Math. Soc. 134 (2006), No. 10, 2823-2832.
[48] H. Iliev, On the irreducibility of the Hilbert scheme of curves in P5 , Comm. Algebra 36 (2008), No. 4, 1550-1564.
[49] V. V. Iliev, Surfaces with $P_g = 3$ and $K^2 = 3$. I, Serdica 6 (1980), 352-362 (in Russian).
[50] V. V. Iliev, Surfaces with $P_g = 3$ and $K^2 = 3$. II, Serdica 7 (1981), 390-395 (in Russian).
[51] V. V. Iliev, A note on certain surfaces, Bull. London Math. Soc. 16 (1984), 135-138.
[52] V. V. Iliev, Isomerism as manifestation of intrinsic symmetry of molecules: Lunn-Senior's theory, Serdica J. Comput. 3 (2009), No. 1, 75-106.
[53] V. V. Iliev, On certain representations of Artin braid group, Stud. Sci. Math. Hung. 51 (2014), No. 3, 285-302.
[54] V. V. Iliev, On a generalization of Markowitz preference relation, Serdica Math. J. 43 (2017), Nos 3-4, 211-220.
[55] V. Kanev, Spectral curves and Prym-Tjurin varieties. I. Abelian Varieties (Egloffstein, 1993), 151-198, de Gruyter, Berlin, 1995.
[56] V. Kanev, Unirationality of Hurwitz spaces of coverings of degree ≤ 5, Int. Math. Res. Not. IMRN (2013), No. 13, 3006-3052.
[57] V. Kanev, Irreducible components of Hurwitz spaces parameterizing Galois coverings of curves of arbitrary genus, Pure Appl. Math. Q. 10 (2014), No. 2, 193-222.
[58] L.-C. Kappe, D. Nikolova-Popova, E. Swartz, Eric On the covering number of small symmetric groups and some sporadic simple groups, Groups Complex. Cryptol. 8 (2016), No. 2, 135–154.
[59] P. A. MacMahon, Combinatory Analysis, vols. 1 and 2, Cambridge Univ. Press. 1915, 1916. Reprinted in one volume: New York, Chelsea, 1960.

[60] T. Musunthia, J. Koppitz, Maximal subsemigroups of some semigroups of order-preserving mappings on a countably infinite set, Forum Math. 29 (2017), No. 4, 971-984.
[61] Y. Susanti, J. Koppitz, On endomorphisms of power-semigroups, Asian-Eur. J. Math. 10 (2017), No. 3, Article ID 1750058, 13 p.

Algebra and Algebraic Geomtery
at the Institute of Mathematics and Informatics
of the Bulgarian Academy of Sciences
Vesselin Drensky

The paper is a survey of the history and some recent achievements of investigations in abstract algebra and algebraic geometry at the Institute of Mathematics and informatics of the Bulgarian Academy of Sciences.

Акад. проф. дмн Веселин Дренски
1113 София
Ул. „Акад. Г. Бончев“, бл. 8
Институт по математика и информатика при БАН