

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

сигнатура:				
4.5	GT	S	05	v1
професионално направление	код на докт. програма	вид курс (базов/спец.)	номер	версия
<i>попълва се административно след приемане от НС на ИМИ</i>				

Утвърдил:
(проф. дмн П. Бойваленков, Директор на ИМИ-БАН)

Учебна програма
за специализиран докторантски курс

Област на висше образование:	4. Природни науки, математика и информатика
професионално направление:	4.5. Математика
докторска програма:	Геометрия и топология
тема:	Векторни разслоения и свързаности
лектор:	проф. дмн Йохан Давидов
данни за връзка с лектора (тел., имейл)	jtd@math.bas.bg
хорариум:	30 часа лекции
кредити съгл. кредитната система на ЦО на БАН:	20

1. Анотация

Основната цел на курса е да се въведат класовете на Чърн на комплексните векторни разслоения в термините на формите на кривината като се използва подхода на Чърн-Вейл. В началото на курса се излагат основни факти за векторните разслоения. Подробно се разглеждат понятията за свързаност върху векторно разслоение и кривина на свързаност. Специално внимание се отделя на холоморфните векторни разслоения. Разглеждат се хиперплоското и универсалното разслоения, като се изчисляват техните пространства от холоморфни сечения, както и формите им на кривината относно свързаността на Чърн. Прави се кратък преглед на теорията на кохомологиите на де Рам и класовете на Чърн се въвеждат като елементи на тези кохомологии. Накрая се пресмятат класовете на Чърн на някои конкретни разслоения..

2. Необходими предварителни знания.

Основни факти за гладките и комплексни многообразия.

3. Компетентности, придобити в резултат на обучението

Придобиване на знания и умения за решаване на математически задачи, отнасящи се до векторни разслоения, свързаности и класове на Чърн.

4. Тематично съдържание

Тема	брой часове лекции
Векторни разслоения	8
Свързаности върху векторни разслоения	10
Тавтологично (универсално) разслоение	6
Класове на Чърн	6

5. Конспект

1. Векторни разслоения – определение и примери.
2. Морфизми на векторни разслоения.
3. Функции на прехода на векторни разслоения.
4. Алгебрични операции върху векторни разслоения.
5. Обратен образ на векторно разслоение.
6. Сечения на векторни разслоения. Репери.
7. Подразслоения. Фактор-разслоения.
8. Де-черта оператор върху холоморфни векторни разслоения.
9. Свързаности върху векторни разслоения – определение и примери. Матрица на свързаност относно репер.
10. Алгебрични операции върху векторни разслоения и индуцирани свързаности.
11. Индуцирана свързаност върху обратния образ на векторно разслоение със зададена свързаност.
12. Метрики върху векторни разслоения и съвместими свързаности.
13. Канонична свързаност на Ермитово холоморфно векторно разслоение (свързаност на Чърн).
14. Оператор върху форми със стойности във векторно разслоение, породен от свързаност.
15. Кривина на свързаност.
16. Втора основна форма на холоморфно подразслоение.
17. Съществуване на специални репери.
18. Хоризонтално подразслоение, определено от свързаност.
19. Паралелен пренос по крива, определен от свързаност.

20. Комплексни проективни пространства.
21. Тавтологично разслоение върху комплексно проективно пространство.
22. Комплексни Грасманови многообразия.
23. Тавтологично разслоение върху комплексно Грасманово многообразие.
24. Влагане на Плюкер.
25. Кривина на тавтологичното разслоение и негови фактор-разслоения.
26. Кохомологии на де Рам – кратък преглед.
27. Инвариантни полиноми.
28. Хомоморфизъм на Вейл.
29. Класове на Чърн – определение и основни свойства.
30. Комплексно линейно разслоение, определено от комплексна хиперповърхнина. Приложение за пресмятане на класовете на Чърн на хиперповърхнини.

6. Препоръчана литература:

Основна:

1. J.-P. Demailly, Complex analytic and differential geometry, 2012 (достъпна в интернет)
2. D. Husemoller, Fibre bundles, 1994.
3. S. Kobayashi, N. Nomizu, Foundation of differential geometry, vol. 1 and 2, 1963-1969.
4. A. Moroianu, Lectures on Kähler geometry, 2004.

Допълнителна:

5. F. Brickell, S.R. Clark, Differentiable manifolds. An introduction, 1970.
6. F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, 1983.
7. R. Narasimhan, Analysis on real and complex manifolds, 1985.
8. R. Bott, L. Tu, Differential forms in algebraic geometry, 1982.

7. Ресурсно осигуряване на обучението:

Свободен достъп до интернет.

8. Критерии за оценка

Изпитът е с продължителност 4 часа и се състои от две части – писмен и устен. На писмения изпит докторантът развива своите идеи и концепции по два въпроса от конспекта. На устния изпит докторантът отговаря на зададени от журито въпроси, свързани с темата на курса. Крайната оценка е от 2 до 6 (с точност до 0.5).

Тя се формира на базата на следното съответствие:

Отличен (6 или 5.50)	Отлично владее материала. Изложението е изчерпателно, последователно, компетентно, логично и хармонично. Правилно обосновава предлаганите решения, знае как да обобщава и излага материала без да прави грешки. Притежава необходимите умения за изпълнение на практически задачи.
Мн. добър (5 или 4.50)	Познава материала. Излага го правилно без да допуска съществени неточности. Може правилно да прилага теоретични принципи и притежава необходимите умения за изпълнение на практически задачи.

Добър (4 или 3.50)	Владее голяма част материала, но допуска неточности при изложението и отговорите на въпросите. Има известни неясноти при опитите за прилагане на материала в практически ситуации.
Среден (3)	Владее само част от материала, но се затруднява в отделните детайли. Допуска неточности във формулировките и нарушава последователността при представянето на материал. Има затруднения при изпълнение на практически задачи.
Слаб (2)	Не познава значителна част от материала, допуска съществени грешки и с големи трудности изпълнява практически задачи.

Учебната програма е обсъдена и одобрена на заседание на секция „Анализ, геометрия и топология“ на 19.03.2024 г.

Ръководител секция: _____

(чл.-кор. Н. Николов)

Разгледана от Директорския съвет на ИМИ-БАН на 21.03.2023 г. (протокол № 13).

Приета от Научния съвет на ИМИ-БАН на 22.03.2024 г. (протокол № 3).

**BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATICS**

Signature:				
4.5	GT	S	05	v1
Professional Field	PhD Programme Code	Course Type	Number	Version
<i>To be filled in after the acceptance by the Scientific Council of IMI</i>				

Approved:
(Prof. DSc P. Boyvalenkov, Director of IMI-BAS)

Curriculum of a Specialized PhD Course

Higher Education Area:	4. Natural Sciences, Mathematics and Informatics
Professional Field:	4.5 Mathematics
PhD Programme:	Geometry and Topology
Theme:	Vector bundles and connections
Lecturer:	Prof. D.Sc. Johann Davidov
Contact Details of the Lecturer (phone, email):	jtd@math.bas.bg
Hours:	30 hours of lectures
Credits According to the Credit System of the Training Centre of BAS:	20

1. Annotation

The main purpose of this course is to introduce the Chern classes of complex vector bundles in terms of curvature forms following the Chern-Weil approach. Basic facts about vector bundles are presented in the beginning of the course. Then the notions of a connection on a vector bundle and the curvature of a connection are discussed. Special attention is paid to the case of holomorphic vector bundles. The hyperplane and the universal bundles are discussed and the spaces of their holomorphic sections are computed as well as the curvature forms of their Chern connections. Short survey on the de Rham cohomology is given and the Chern classes are introduced as elements of this cohomology. The Chern classes of concrete vector bundles are computed in the end of the course.

2. Prerequisites

Basic facts about smooth and complex manifolds

3. Expected Learning Outcomes

Acquisition of knowledge and skills for solving mathematical problems related to vector bundles, connections and Chern classes.

4. Topical Outline of Content

Topic	Hours Lectures	Hours Practical Exercises
Vector bundles	8	
Connections on vector bundles	10	
The tautological (universal) bundle	6	
Chern's classes	6	

5. Questionnaire (list of selected questions)

1. Vector bundles –definition and examples.
2. Morphisms of vector bundles.
3. Transition functions of vector bundles.
4. Algebraic operations on vector bundles.
5. Pull-back of a vector bundle.
6. Sections of vector bundles. Frames.
7. Subbundles. Quotient bundles.
8. The \bar{d} operator on holomorphic vector bundles.
9. Connections on vector bundles – definition and examples. The matrix of a connection with respect to a frame.
10. Algebraic operations on vector bundles and induced connections.
11. The induced connection on the pull-back of a vector bundle with connection.
12. Metrics on vector bundles and compatible connections.
13. The canonical connection on a Hermitian holomorphic vector bundle (Chern's connection).
14. The operator on forms with values in a vector bundle induced by a connection.
15. The curvature of a connection.
16. The second fundamental form of a holomorphic subbundle.
17. Existence of special frames.
18. The horizontal subbundle yielded by a connection.
19. Parallel transport along a curve determined by a connection.

20. Complex projective spaces.
21. The tautological bundle over a complex projective space.
22. Complex Grassmann manifolds.
23. The tautological bundle over a complex Grassmann manifold.
24. Plücker's imbedding.
25. The curvature of the tautological bundle and tautological quotient bundles over a complex projective space
26. De Rham cohomology – a short survey.
27. Invariant polynomials.
28. Weil's homomorphism.
29. Chern's classes – definition and basic properties.
30. The complex line bundle yielded by a complex hypersurface. Applications to computing the Chern classes of hypersurfaces.

6. References

Basic:

1. J.-P. Demailly, Complex analytic and differential geometry, 2012
2. D. Husemoller, Fibre bundles, 1994.
3. S. Kobayashi, N. Nomizu, Foundation of differential geometry, vol. 1 and 2, 1963-1969.
4. A. Moroianu, Lectures on Kähler geometry, 2004.

Additional:

5. F. Brickell, S.R. Clark, Differentiable manifolds. An introduction, 1970.
6. F. W. Warner, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, 1983.
7. R. Narasimhan, Analysis on real and complex manifolds, 1985.
8. R. Bott, L. Tu, Differential forms in algebraic geometry, 1982.

7. Resource provision of training

Free internet access.

8. Evaluation criteria

The exam shall continue 4 hours and shall consists of two parts – written and oral. At the written exam the PhD student presents his/her ideas and concepts on two given questions from the questionnaire. At the oral exam, the PhD student answers questions asked by the jury related to the topic of the course.

The final grade is from 2 to 6 (to the nearest 0.5).

It is formed on the basis of the following correspondence:

Excellent (6 or 5.50)	Excellent command of the material. Comprehensive, consistent, competent, logical and harmonious presentation. Proper justification of the proposed solutions, good summary and presentation of the material without making mistakes. Good necessary skills to perform practical tasks.
Very good (5 or 4.50)	Satisfactory command of the material. Correct explanation without significant inaccuracies. Proper application of the theoretical principles and appropriate performance of practical tasks.

Good (4 or 3.50)	Good command of the material, but with inaccuracies in the presentation and in the answers to questions. There are some ambiguities in attempts to apply the material in practical situations.
Average (3)	Limited command of the material, difficulties in the individual details. Inaccuracies in the wording and inconsistency in the presentation of the material. Difficulties in the performing of practical tasks.
Weak (Failing grade) (2)	A significant part of the material is not known, serious mistakes are made and the practical tasks are performed with great difficulty.

The curriculum was discussed and approved at a meeting of the Department “Analysis, Geometry and Topology”, held on 19.03.2024

Head of Department: _____

(Prof. N. Nikolov)

Approved by the Board of Directors of IMI-BAS on 21.03.2024 (Minutes No. 13)

Accepted by the Scientific Council of IMI-BAS on 22.03.2024 (Minutes No. 3)