

БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

| сигнатура: | | | | |
|--|-----------------------|------------------------|-------|--------|
| 4.5 | МА | S | 03 | v1 |
| професионално направление | код на докт. програма | вид курс (базов/спец.) | номер | версия |
| <i>попълва се административно след приемане от НС на ИМИ</i> | | | | |

Утвърдил:
(проф. дмн П. Бойваленков, Директор на ИМИ-БАН)

Учебна програма
за специализиран докторантски курс

| | |
|--|--|
| Област на висше образование: | 4.Природни науки, математика и информатика |
| професионално направление: | 4.5 Математика |
| докторска програма: | Математически анализ |
| тема: | Увод във функционалния анализ |
| лектор: | проф. дмн Денка Куцарова |
| данни за връзка с лектора (тел., имейл) | denka@illinois.edu |
| хорариум: | 30 часа лекции |
| кредити съгл. кредитната система на ЦО на БАН: | 20 |

1. Анотация

Курсът представлява стандартен увод в линейния функционален анализ и теория на операторите. Обръща се сериозно внимание на пълните метрични пространства. Доказват се основните теореми на функционалния анализ и се извежда спектралното разлагане на компактен самоспрегнат оператор в хилбертово пространство.

2. Необходими предварителни знания

Задълбочено познаване на линейна алгебра и анализ (ДИС). Познаването на интеграла на Лебег би било полезно, но не е задължително.

3. Компетентности, придобити в резултат на обучението

Усвояване на знания и умения в областта на функционалния анализ и развиване на способност за формулиране и решаване на проблеми

4. Тематично съдържание

| тема | брой часове лекции |
|--|--------------------|
| Метрични пространства | 8 |
| Банахови пространства, линейни функционали | 8 |
| Линейни оператори | 8 |
| Компактни оператори | 6 |

5. Конспект

1. Линейни нормирани пространства. Примери
2. Пълнота и попълване.
3. Елементарни факти за непрекъснати линейни оператори. Пълнота на $B(X, Y)$. Примери
4. Хилбертово пространство. Спрегнато на хилбертово пространство. Ортогонални системи.
5. Теорема на Хан-Банах. Теорема за отделимост. Следствия от теоремата на Хан Банах.
6. Теорема на Бер. Приложения. Теорема на Банах за отвореното изоблажени. Теорема за затворената графика.
7. 7. Компактност в метрично пространство. Теорема на Арцела-Асколи.
8. Компактни оператори. Спрегнат оператор.
9. Теория на Фредхолм.
10. Самоспрегнат оператор. Общи свойства.
11. Спектрална теория за компактен самоспрегнат оператор.

6. Препоръчана литература:

1. Eidelman, Milman, Tsolomitis: Functional Analysis. An Introduction. AMS, 2004.
2. M.Fabian, P.Habala, P. Hajek, V.M.Santalucia, J.Pelant, V. Zizler. Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, Springer, 2001.
3. R.B.Holmes, Geometric Functional Analysis and its Applications, Springer-Verlag, 1975.

7. Ресурсно осигуряване на обучението:

Няма

8. Критерии за оценка

Изпитът е с продължителност 4 часа и се състои от две части – писмен и устен.

На писмения изпит докторантът развива своите идеи и концепции по два въпроса от конспекта.

На устния изпит докторантът отговаря на зададени от журито въпроси, свързани с темата на курса.

Крайната оценка е от 2 до 6 (с точност до 0.5).

Тя се формира на базата на следното съответствие:

| | |
|---------------------------|--|
| Отличен (6 или 5.50) | Отлично владее материала. Изложението е изчерпателно, последователно, компетентно, логично и хармонично. Правилно обосновава предлаганите решения, знае как да обобщава и излага материала без да прави грешки. Притежава необходимите умения за изпълнение на практически задачи. |
| Мн. добър (5 или 4.50) | Познава материала. Излага го правилно без да допуска съществени неточности. Може правилно да прилага теоретични принципи и притежава необходимите умения за изпълнение на практически задачи. |
| Добър (4 или 3.50) | Владее голяма част от материала, но допуска неточности при изложението и отговорите на въпросите. Има известни неясноти при опитите за прилагане на материала в практически ситуации. |
| Среден (3) | Владее само част от материала, но се затруднява в отделните детайли. Допуска неточности във формулировките и нарушава последователността при представянето на материал. Има затруднения при изпълнение на практически задачи. |
| Слаб (2) | Не познава значителна част от материала, допуска съществени грешки и с големи трудности изпълнява практически задачи. |

Учебната програма е обсъдена и одобрена на заседание на секция „Анализ, геометрия и топология“ на 04.07.2023 г.

Ръководител секция:

_____ (чл.-кор. Николай Николов)

Разгледана от Директорския съвет на ИМИ-БАН на 06.07.2023 (протокол № 27).

Приета от Научния съвет на ИМИ-БАН на 07.07.2023 (протокол № 7).

**BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATICS**

| Signature: | | | | |
|--|--------------------|-------------|-----------|-----------|
| 4.5 | MA | S | 03 | v1 |
| Professional Field | PhD Programme Code | Course Type | Number | Version |
| <i>To be filled in after the acceptance by the Scientific Council of IMI</i> | | | | |

Approved:
(Prof. DSc P. Boyvalenkov, Director of IMI-BAS)

Curriculum of a Specialized PhD Course

| | |
|--|--|
| Higher Education Area: | 4. Natural sciences, mathematics and informatics |
| Professional Field: | 4.5 Mathematics |
| PhD Programme: | Mathematical analysis |
| Theme: | Introduction to functional analysis |
| Lecturer: | Denka Kutzarova |
| Contact Details of the Lecturer (phone, email): | denka@illinois.edu |
| Hours: | 30 hours of lectures |
| Credits According to the Credit System of the Training Centre of BAS: | 20 |

1. Annotation

The announced course is an introduction to the basic ideas and methods of functional analysis and operator theory. The basic theorems of Banach space theory are proved and the spectral decomposition of a compact self-adjoint operator is derived. See the syllabus for a description of the topics under consideration.

2. Prerequisites

Differential and Integral Calculus 1, Differential and Integral Calculus 2, Linear Algebra

3. Expected Learning Outcomes

Knowledge acquisition in the area of the functional analysis and developing an ability to formulate and solve problems.

4. Topical Outline of Content

| Topic | Hours Lectures |
|-----------------------------------|----------------|
| Metric spaces | 8 |
| Banach spaces, linear functionals | 8 |
| Linear operators | 8 |
| Compact operators | 6 |

5. Questionnaire (list of selected questions)

1. Normed vector spaces. Basic examples.
2. Metric spaces. Completion of a metric space – existence and uniqueness.
3. Elementary facts about continuous linear operators. Completeness of $B(X, Y)$. Basic examples.
4. Hilbert space. The dual of a Hilbert space. Orthogonal basis in a Hilbert space.
5. Hahn-Banach theorem. Separation theorems. Applications.
6. Baire theorem. Simple applications. Banach open mapping theorem. Closed graph theorem. Uniform boundedness principle.
7. Compactness in metric spaces. Arzela-Ascoli theorem.
8. Compact operators. Dual operators.
9. Fredholm alternative.
10. Spectral theory – basic facts.
11. Self-adjoint operators. Spectral decomposition of a compact self-adjoint operator.

6. References

1. Eidelman, Milman, Tsolomitis: Functional Analysis. An Introduction. AMS, 2004.
2. M.Fabian, P.Habala, P. Hajek, V.M.Santalucia, J.Pelant, V. Zizler. Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry, Springer, 2001.
3. R.B.Holmes, Geometric Functional Analysis and its Applications, Springer-Verlag, 1975.

7. Resource provision of training

No

8. Evaluation criteria

The exam shall continue 4 hours and shall consists of two parts – written and oral.

At the written exam the PhD student presents his/her ideas and concepts on two given questions from the questionnaire.

At the oral exam, the PhD student answers questions asked by the jury related to the topic of the course.

The final grade is from 2 to 6 (to the nearest 0.5).

It is formed on the basis of the following correspondence:

| | |
|--------------------------------|--|
| Excellent (6 or 5.50) | Excellent command of the material. Comprehensive, consistent, competent, logical and harmonious presentation. Proper justification of the proposed solutions, good summary and presentation of the material without making mistakes. Good necessary skills to perform practical tasks. |
| Very good (5 or 4.50) | Satisfactory command of the material. Correct explanation without significant inaccuracies. Proper application of the theoretical principles and appropriate performance of practical tasks. |
| Good (4 or 3.50) | Good command of the material, but with inaccuracies in the presentation and in the answers to questions. There are some ambiguities in attempts to apply the material in practical situations. |
| Average (3) | Limited command of the material, difficulties in the individual details. Inaccuracies in the wording and inconsistency in the presentation of the material. Difficulties in the performing of practical tasks. |
| Weak (Failing grade) (2) | A significant part of the material is not known, serious mistakes are made and the practical tasks are performed with great difficulty. |

The curriculum was discussed and approved at a meeting of the Department “Analysis, Geometry and Topology” held on 04.07.2023

Head of Department:

(Prof. N. Nikolov)

Approved by the Board of Directors of IMI-BAS on 06.07.2023 (Minutes No. 27)

Accepted by the Scientific Council of IMI-BAS on 07.07.2023 (Minutes No. 7)