

**БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА**

сигнатура:				
4.5	ММАМ	S	04	v01
професионално направление	код на докт. програма	вид курс (базов/спец.)	номер	версия
<i>попълва се административно след приемане от НС на ИМИ</i>				

Утвърдил:

(проф. дмн П. Бойваленков, Директор на ИМИ-БАН)

**Учебна програма
за специализиран докторантски курс**

Област на висше образование:	4. Природни науки, математика и информатика
професионално направление:	4.5. Математика
докторска програма:	Математическо моделиране и приложение на математиката
тема:	Теория на бифуркациите и приложения
лектор:	доц. Петър Рашков
данни за връзка с лектора (тел., имейл)	02 9793885 p.rashkov@math.bas.bg
хорариум:	20 часа лекции и 20 часа практически упражнения
кредити съгл. кредитната система на ЦО на БАН:	20

1. Анотация

Теорията на бифуркациите изследва качествените промени в динамиката на разглежданата система, когато варират един или повече параметри. Курсът дава увод в основните идеи и резултати от бифуркационния анализ на непрекъснатите динамични системи и разглежда приложения в математическото моделиране в биологията и науките за живота. Основната цел е класификацията на локалните бифуркации на векторни полета и решаването на нелинейни уравнения с помощта на числено продължение. Курсът представя основните теоретични концепции и ги илюстрира практически, използвайки популярния пакет за числено продължение MatCont, основан на MATLAB. Ще бъдат разгледани примерни

модели с мотивация от екологията и епидемиологията, които илюстрират как могат да бъдат пресметнати равновесия, периодични орбити и техните локални бифуркации.

2. Необходими предварителни знания

Теория на динамичните системи, Линейна алгебра, Обикновени диференциални уравнения

3. Компетентности, придобити в резултат на обучението

Докторантите, които използват модели, описани с обикновени диференциални уравнения, ще добият знания за основните понятия в бифуркационния анализ, както и умения за числен анализ, основан на метода за продължаване на решенията на динамичните системи в зависимост от промяната във входните параметри. Ще бъдат развити и умения за програмиране на числената задача в пакета за числено продължение MatCont, основан на MATLAB.

4. Тематично съдържание

тема	брой часове лекции	брой часове практически упражнения
Динамични системи: топологична еквивалентност, структурна устойчивост	2	
Бифуркации и бифуркационни диаграми	1	
Нормална форма на бифуркация за едномерни и двумерни системи	2	
Еднопараметърни бифуркации на равновесия и продължение	2	
Бифуркация на Хопф и продължение	2	
Бифуркации на равновесия и периодични орбити в системи с по-висока размерност	2	
Теорема за централното многообразие	1	
Класификация на орбити	2	
Двупараметърни бифуркации на равновесия	2	
Други типове бифуркации (седловина, тор, удвояване на периода)	2	
Хаос и странни атрактори	2	

Приложения на теория на бифуркациите в модели за популационна динамика в екологията		5
Приложения на теория на бифуркациите в епидемиологични модели		5
Числен бифуркационен анализ с пакет MatCont		10

5. Конспект

1. Топологична еквивалентност на непрекъснати динамични системи [2]
2. Бифуркации и бифуркационни диаграми [1]
3. Структурна устойчивост на динамични системи [1,2]
4. Еднопараметърни бифуркации на равновесия в непрекъснати динамични системи [1,2]
5. Нормална форма на тангенциална бифуркация [2]
6. Продължение на тангенциална бифуркация [1,3]
7. Нормална форма на бифуркация на Хопф за двумерни динамични системи [1,2]
8. Продължение на бифуркация на Хопф [1,3]
9. Бифуркации на равновесия и периодични орбити в n-мерни непрекъснати динамични
10. системи [2]
11. Теорема за централното многообразие [2].
12. Хомоклини и хетероклини орбити [1].
13. Бифуркация с удвояване на периода [1,2]
14. Други типове бифуркации (седловина, тор и др.) [1,2].
15. Хаос в детерминистични непрекъснати динамични системи и странни атрактори: основни понятия [1]
16. Двупараметърни бифуркации на равновесия в непрекъснати динамични системи [2]
17. Приложения на теория на бифуркациите в модели, описващи биологични явления [4]
18. Числен бифуркационен анализ с библиотека MatCont за MATLAB [3]

6. Препоръчана литература:

1. J. Guckenheimer, P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer New York, 6th printing, 2002.
2. Y. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 3rd edition, 2004.
3. W. Govaerts, Yu. A. Kuznetsov, H.G.E. Meijer, B. Al-Hdaibat, V. De Witte, A. Dhooge, W. Mestrom, N. Neiryck, A.M. Riet, B. Sautois. *MATCONT: Continuation toolbox for ODEs in MATLAB*, <https://webspacescience.uu.nl/~kouzn101/NBA/ManualMatcontAug2019.pdf> (124 p.)
4. F. Brauer, C. Castillo-Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer New York, 2012.

7. Ресурсно осигуряване на обучението:

Библиотека MatCont (пакет със свободен достъп) за MATLAB.

8. Критерии за оценка

Изпитът е с продължителност 4 часа и се състои от две части – писмен и устен.

На писмения изпит докторантът развива своите идеи и концепции по два въпроса от конспекта и решава практическа задача в пакет MatCont, свързана с числен бифуркационен анализ на даден модел. На устния изпит докторантът отговаря на зададени от журито въпроси, свързани с темата на курса.

Крайната оценка е от 2 до 6 (с точност до 0.5).

Тя се формира на базата на следното съответствие:

Отличен (6 или 5.50)	Отлично владее материала. Изложението е изчерпателно, последователно, компетентно, логично и хармонично. Правилно обосновава предлаганите решения, знае как да обобщава и излага материала без да прави грешки. Притежава необходимите умения за изпълнение на практически задачи.
Мн. добър (5 или 4.50)	Познава материала. Излага го правилно без да допуска съществени неточности. Може правилно да прилага теоретични принципи и притежава необходимите умения за изпълнение на практически задачи.
Добър (4 или 3.50)	Владее голяма част от материала, но допуска неточности при изложението и отговорите на въпросите. Има известни неясноти при опитите за прилагане на материала в практически ситуации.
Среден (3)	Владее само част от материала, но се затруднява в отделните детайли. Допуска неточности във формулировките и нарушава последователността при представянето на материал. Има затруднения при изпълнение на практически задачи.
Слаб (2)	Не познава значителна част от материала, допуска съществени грешки и с големи трудности изпълнява практически задачи.

Учебната програма е обсъдена и одобрена на заседание на секция „Математическо моделиране и числен анализ“, на 17.10.2022 г

Ръководител секция:

_____ (проф. Камен Иванов)

Разгледана от Директорския съвет на ИМИ-БАН на 21.10.2022 г. (протокол № 41).

Приета от Научния съвет на ИМИ-БАН на 28.10.2022 г. (протокол № 10).

**BULGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATICS**

Signature:				
4.5	MMAM	S	04	v01
Professional Field	PhD Programme Code	Course Type	Number	Version
<i>To be filled in after the acceptance by the Scientific Council of IMI</i>				

Approved:
(Prof. DSc P. Boyvalenkov, Director of IMI-BAS)

Curriculum of a Specialized PhD Course

Higher Education Area:	4. Natural Sciences, Mathematics and Informatics
Professional Field:	4.5 Mathematics
PhD Programme:	Mathematical modelling and applications of mathematics
Theme:	Bifurcation Theory and Applications
Lecturer:	Assoc. Prof. Peter Rashkov
Contact Details of the Lecturer (phone, email):	02 9793885 p.rashkov@math.bas.bg
Hours:	20 hours of lectures and 20 hours of practical exercises
Credits According to the Credit System of the Training Centre of BAS:	20

1. Annotation

Bifurcation theory studies the qualitative changes in the dynamics of the considered system when one or more parameters vary. The course provides an introduction to the basic ideas and results of bifurcation analysis of continuous dynamical systems and examines applications in mathematical modeling in biology and life sciences. The main goal is the classification of local bifurcations of vector fields and the solution of nonlinear equations using numerical continuation. The course presents main theoretical concepts and illustrates them in practice using the popular numerical continuation package MatCont based on MATLAB. Example models motivated by ecology and

epidemiology will be considered to illustrate how equilibria, periodic orbits and their local bifurcations can be computed.

2. Prerequisites

Theory of dynamical systems, Linear algebra, Ordinary differential equations

3. Expected Learning Outcomes

PhD students using models described by ordinary differential equations will gain knowledge of basic concepts in bifurcation analysis, as well as numerical analysis skills based on the method of continuing solutions of dynamical systems subject to change in input parameters. Skills for programming the numerical problem in the numerical continuation package MatCont based on MATLAB will also be developed.

4. Topical Outline of Content

Topic	Hours Lectures	Hours Practical Exercises
Dynamical systems: topological equivalence, structural stability	2	
Bifurcations and bifurcation diagrams	1	
Normal form of bifurcations for one-dimensional and two-dimensional systems	2	
One-parameter bifurcations of equilibria and continuation	2	
Hopf bifurcation and continuation	2	
Bifurcations of equilibria and periodic orbits in higher dimensional systems	2	
Centre manifold theorem	1	
Classification of orbits	2	
Two-parameter bifurcations of equilibria	2	
Other types of bifurcations (saddle, torus, period doubling)	2	
Chaos and strange attractors	2	
Applications of bifurcation theory in models of population dynamics in ecology		5
Applications of bifurcation theory in epidemiological models		5
Numerical bifurcation analysis with MatCont package		10

5. Questionnaire (list of selected questions)

1. Topological equivalence of continuous dynamical systems [2]
2. Bifurcations and bifurcation diagrams [1]
3. Structural stability of dynamical systems [1,2]
4. One-parameter bifurcations of equilibria in continuous dynamical systems [1,2]
5. Normal form of tangent bifurcation [2]
6. Continuation of tangent bifurcation [1,3]
7. Normal form of Hopf bifurcation for two-dimensional dynamical systems [1,2]
8. Continuation of a Hopf bifurcation [1,3]
9. Bifurcations of equilibria and periodic orbits in n-dimensional continuous dynamical systems [2]
10. Centre manifold theorem [2].
11. Homoclinic and heteroclinic orbits [1].
12. Period-doubling bifurcation [1,2]
13. Other types of bifurcations (saddle, torus, etc.) [1,2].
14. Chaos in Deterministic Continuous Dynamical Systems and Strange Attractors: Basic Concepts [1]
15. Two-parameter bifurcations of equilibria in continuous dynamical systems [2]
16. Applications of bifurcation theory in models describing biological phenomena [4]
17. Numerical bifurcation analysis with MatCont package for MATLAB [3]

6. References

1. J. Guckenheimer, P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer New York, 6th printing, 2002.
2. Y. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 3rd edition, 2004.
3. W. Govaerts, Yu. A. Kuznetsov, H.G.E. Meijer, B. Al-Hdaibat, V. De Witte, A. Dhooge, W. Mestrom, N. Neiryneck, A.M. Riet, B. Sautois. *MATCONT: Continuation toolbox for ODEs in MATLAB*, <https://webpace.science.uu.nl/~kouzn101/NBA/ManualMatcontAug2019.pdf> (124 p.)
4. F. Brauer, C. Castillo-Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*. Springer New York, 2012.

7. Resource provision of training

MatCont library (open access package) for MATLAB.

8. Evaluation criteria

In the written exam, the PhD student develops his/her ideas and concepts on two questions from the syllabus and solves a practical problem in the MatCont package related to numerical bifurcation analysis of a given model. At the oral exam, the doctoral student answers questions related to the subject of the course set by the examiners.

The final grade is from 2 to 6 (to the nearest 0.5).

It is formed on the basis of the following correspondence:

Excellent (6 or 5.50)	Excellent command of the material. Comprehensive, consistent, competent, logical and harmonious presentation. Proper justification of the proposed solutions, good summary and presentation of the material without making mistakes. Good necessary skills to perform practical tasks.
Very good (5 or 4.50)	Satisfactory command of the material. Correct explanation without significant inaccuracies. Proper application of the theoretical principles and appropriate performance of practical tasks.
Good (4 or 3.50)	Good command of the material, but with inaccuracies in the presentation and in the answers to questions. There are some ambiguities in attempts to apply the material in practical situations.
Average (3)	Limited command of the material, difficulties in the individual details. Inaccuracies in the wording and inconsistency in the presentation of the material. Difficulties in the performing of practical tasks.
Weak (Failing grade) (2)	A significant part of the material is not known, serious mistakes are made and the practical tasks are performed with great difficulty.

The curriculum was discussed and approved at a meeting of the Department “Mathematical Modelling and Numerical Analysis”, held on 17.10.2022

Head of Department:

(Prof. Kamen Ivanov)

Approved by the Board of Directors of IMI-BAS on 21.10.2022 (Minutes No. 41)

Accepted by the Scientific Council of IMI-BAS on 28.10.2022 (Minutes No. 10)