БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

сигнатура:				
4.5	**ANT**	**S**	**02**	**v1**
професионално направление	код на докт. програма	вид курс (базов/спец.)	номер	версия
попълва се административно след приемане от НС на ИМИ				

Утвърдил:
(акад. В. Дренски, Директор на ИМИ-БАН)

Учебна програма
за специализиран докторантски курс

Област на висше образование:	4. Природни науки, математика и информатика
професионално направление:	4.5. Математика.
докторска програма:	Алгебра и теория на числата
тема:	Алгебрична теория на числата
лектор:	доц. д-р Иван Д. Чипчаков
данни за връзка с лектора (тел., имейл)	chipchak@math.bas.bg
хорариум:	30 часа лекции
кредити съгл. кредитната система на ЦО на БАН:	20

1. Анотация

Основната част от курса е посветена на изучаването на пръстена от целите алгебрични числа O_K, съдържащи се в числово поле K, под което тук разбираме крайно разширение на полето на рационалните числа $\mathbb{Q}$. Най-напред е изследвана адитивната структура на O_K, по-специално, показано е, че адитивната група на O_K е свободна абелева група от ранг равен на степента $[K:\mathbb{Q}]$. Показано е, че O_K е дедекиндов пръстен и е развита теорията на делимостта в такива пръстени. Основен резултат на тази теория е аналог на основната теорема на аритметиката за ненулевите идеали на дедекиндов пръстен R, при което ролята на простите числа, в случая на пръстена на целите числа $\mathbb{Z}$, се изпълнява от ненулевите прости идеали на R, които винаги се оказват максимални. Върху основата на понятието дробен идеал, е въведена групата класове идеали Cl(R) на R, при което редът на Cl(R) дава представа доколко R се отличава от областите на главни идеали. Изследвана е и цялата обвивка T на пръстена R в крайно сепарабелно разширение на полето от частни на R, установено е, че T запазва дедекиндовостта на R. При определени ограничения върху R, изпълнени, когато R = O_K, е установен и закон за разлагане на идеала P.T, където P е максимален идеал на R, в произведение на ненулеви прости идеали на T. Изложен е и т.н. геометричен метод за изследване на O_K, като с негова помощ е доказана две класически теореми на Дирихле. Първата теорема гласи, че $Cl(O_K)$ винаги е крайна (абелева) група (за сравнение, може да се докаже, че всяка абелева група се реализира като група от класовете идеали на някой дедекиндов пръстен). Демонстрирани са редица приложения на тази теорема, както и възможностите на геометричния метод, между които, доказателства на теоремите на Ермит за абсолютните дискриминанти на числовите полета и на известна хипотеза на Ферма относно целочислената представимост на определени естествени числа от квадратичната форма $X^2 + 5Y^2$. Втората теорема на Дирихле, разгледана в курса, е теоремата за единиците. Тази теорема определя напълно структурата на мултипликативната група на O_K и, по-общо, мултипликативната група на произволен порядък на полето K. Същевременно, тя придава завършен вид на важни части от теорията на делимостта на пръстена O_K.

Курсът включва и увод в теорията на нормиранията на числовите полета, а също така, на локалните полета, естествено възникващи като техни попълвания. Пред слушателите на курса се излага алтернативен на дедекиндовия подход за развитието на алгебричната теория на числата, водещ началото си от Кронекер, Хензел и други математици, а връзката между двата подхода се установява с помощта на теоремата на Кумер. Този подход се оказва особено удобен за прилагане при решаването на задачи от диофантовия анализ. В курса това е демонстрирано с доказателството на теоремата на Минковски-Хасе за нулите на рационалните квадратични форми и класифицирането на неизродените форми от този вид с точност до еквивалентност над $\mathbb{Q}$.

2. Необходими предварителни знания

За разбирането на курса е достатъчна подготовка в рамките на магистърска степен по алгебра и на бакалавърска степен по елементарна теория на числата.

3. Компетентности, придобити в резултат на обучението

Познаване на основите на алгебричната теория на числата, на локално-глобалния подход и на други утвърдени методи за нейното развитие и приложение.

4. Тематично съдържание

№	ТЕМА	лекции
1	Естествени числа, представими като суми на два целочислени квадрата (описание на Ферма). Теорема на Лагранж за четирите квадрата.	1
2	Числови полета K и цели алгебрични числа в K, адитивна структура на пръстена на целите алгебрични числа (максималния порядък) на K.	3
3	Пръстени на дискретно нормиране и дедекиндови пръстени.	2

4	Дедекиндови пръстени, характеризации. Примарно разлагане на идеалите на дедекиндов пръстен и други техни свойства. Група класове идеали Cl(R) на дедекиндов пръстен R.	3
5	Дедекиндовост на пръстена на всички цели алгебрични числа в числово поле.	2
6	Цяла обвивка T на дедекиндов пръстен R в крайно сепарабелно разширение на полето от частни на R. Нормено изображение от Cl(T) в Cl(R); норма на идеал в максимален порядък.	2
7	Разклонение. Диферента и дискриминанта.	3
8	Абсолютна дискриминанта и фундаментален базис.	2
9	Крайност на групата класове идеали на (максималния порядък OK на) числово поле K (теорема на Дирихле). Оценка на Минковски за дробен идеал на OK.	2
10	Приложения на оценката на Минковски: теореми на Ермит за дискриминантата; пример на неевклидов пръстен на главни идеали, съставен от цели алгебрични числа; доказателство на хипотезата на Ферма за разрешимост в цели числа на уравнението X2 + Y2 = P1P2, където P1 и P2 са прости числа, сравними с 3 или 7 по модул 20.	3
11	Теорема на Дирихле за единиците на порядък на числово поле K.	2
12	Приложения на теоремата на Дирихле за единиците: уравнение на Пел; крайна породеност на мултипликативната група на комутативен пръстен с единица и с крайно-породена адитивна група.	2
13	Попълвания на полета с реално-значни нормирания. Локални полета.	1
14	Локално-глобален принцип в алгебричната теория на числата и диофантовия анализ. Теорема на Кумер и теорема на Минковски-Хасе. Приложение: доказателство на теоремата на Гаус за числата, представими като суми на три целочислени квадрата.	2

5. Конспект

1. Естествени числа, представими като суми на два целочислени квадрата (описание на Ферма). Теорема на Лагранж за четирите квадрата.
2. Числови полета K и цели алгебрични числа в K, адитивна структура на пръстена на целите алгебрични числа (максималния порядък) на K.
3. Пръстени на дискретно нормиране и дедекиндови пръстени.
4. Дедекиндов пръстен, характеризации; примарно разлагане и други свойства на техните идеали. Група класове идеали Cl(R) на дедекиндов пръстен R.
5. Дедекиндовост на пръстена на всички цели алгебрични числа в числово поле.
6. Цяла обвивка T на дедекиндов пръстен R в крайно сепарабелно разширение на полето от частни на R. Нормено изображение Cl(T) → Cl(R); норма на идеал в максимален порядък. Формула за нормата на главен идеал.

7. Разклонение. Диферента и дискриминанта.
8. Абсолютна дискриминанта и фундаментален базис.
9. Крайност на групата класове идеали на (максималния порядък O_K на) числово поле K (теорема на Дирихле). Оценка на Минковски за дробен идеал на O_K.
10. Приложения на оценката на Минковски: теореми на Ермит за дискриминантата; пример на неевклидов числов пръстен на главни идеали; доказателство на хипотезата на Ферма за разрешимост в цели числа на уравнението $X^2 + 5Y^2 = P_1P_2$, където P_1 и P_2 са прости числа сравними с 3 или 7 по модул 20.
11. Теорема на Дирихле за единиците на порядък на числово поле K (от степен $n = r + 2t$).
12. Приложения на теоремата на Дирихле за единиците: уравнение на Пел; крайна породеност на мултипликативната група на комутативен пръстен с единица и с крайно-породена адитивна група.
13. Попълвания на полета с реално-значни нормирания. Локални полета.
14. Локално-глобален принцип в алгебричната теория на числата и диофантовия анализ. Теорема на Кумер и теорема на Минковски-Хасе. Приложение: доказателство на теоремата на Гаус, описваща естествените числа, представими като суми на три целочислени квадрата.

6. Препоръчана литература:

1. З.И. Боревич, И.Р. Шафаревич, Теория чисел, 3-е изд. доп., „Наука“, Москва, 1985.
2. J.W.S. Cassels, A. Fröhlich (Eds.), Algebraic Number Theory, Proc. Instruct. Conference, organized by LMS (a NATO Adv. Study Inst.) with the support of IMU, Univ. of Sussex, Brighton, 01.9-17.9., 1965, Academic Press, London-New York, 1967.
3. K. Ireland, M. Rosen, A Classical Introduction to Modern Number Theory, Graduate Texts in Mathematics, v. 87, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.
4. K. Iwasawa, Local Class Field Theory, Transl. from Japanese into Russian by A.A. Bel‘skij, transl. edited by B.B. Venkov, Mir, Moscow, 1983.
5. H. Koch, Algebraic Number Fields, in: Parshin, A.N. (ed.) et al., Number theory II: Algebraic number theory. Transl. from the Russian. Berlin: Springer-Verlag. Encycl. Math. Sci. {\bf 62}, (1992); Second Printing 1997.
6. S. Lang, Algebraic Numbers, Addison-Wesley Series in Mathematics. Reading, Mass. etc.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. IX, 1964.
7. S. Lang, Algebra, 3rd revised edition, Graduate Texts in Math., New York, Springer, 2005.
8. P. Samuel, Theorie Algebrique des Nombres, Collection methodes. Paris: Hermann \& Cie. 130 p., 1967.
9. A. Weil, Basic Number Theory, Reprint of the 2nd ed. 1973, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

Забележка. Първите издания на книгите с номера 2 (с изключение на главата, съдържаща дисертацията на Дж. Тейт), 3, 6, 7 и 9, преведени на руски език, са публикувани от издателство „Мир“. Изложение на дисертацията на Тейт може да се намери и в [6].

7. Ресурсно осигуряване на обучението:

няма

8. Критерии за оценка

Изпитът е с продължителност 4 часа и се състои от две части – писмен и устен.
На писмения изпит докторантът показва уменията си, като решава теоретична задача.
На устния изпит докторантът излага знанията си по два въпроса от конспекта.
На устния изпит докторантът отговаря на зададени от преподавателя въпроси, свързани с темата на курса.

Крайната оценка е от 2 до 6 (с точност до 0.5).
Тя се формира на базата на следното съответствие:

Отличен (6)	Мн.добър (5)	Добър (4)	Среден (3)	Слаб (2)
Отлично владее материала. Изложението е изчерпателно, последователно, компетентно, логично и хармонично. Правилно обосновава предлаганите решения, знае как да обобщава и излага материала без да прави грешки. Притежава необходимите умения за изпълнение на практически задачи.	Познава материала. Излага го правилно без да допуска съществени неточности. Може правилно да прилага теоретични принципи и притежава необходимите умения за изпълнение на практически задачи.	Владее голяма част материала, но допуска неточности при изложението и отговорите на въпросите. Има известни неясноти при опитите за прилагане на материала в практически ситуации.	Владее само част от материала, но се затруднява в отделните детайли. Допуска неточности във формулировките и нарушава последователността при представянето на материал. Има затруднения при изпълнение на практически задачи.	Не познава значителна част от материала, допуска съществени грешки и с големи трудности изпълнява практически задачи.

Учебната програма е обсъдена и одобрена на заседание на секция “Алгебра и логика“
на 11.03. 2020 г.

Ръководител секция:

(доц. д-р Иван Чипчаков)

Учебната програма е разгледана от Директорския съвет на ИМИ-БАН
на 12.03.2020 г. (протокол № 10).

Учебната програма е приета от Научния съвет на ИМИ-БАН
на 13.03.2020 г. (протокол № 4).