

# Научен отчет

за втория етап на проект

ДН 12/2 „Риманова и комплексна геометрия“

## I. Описание на осъществените изследвания и дейности по работните пакети

**Работен пакет 1. Геометрия на класически и обобщени туйсторни пространства**  
(от месец 19 до месец 36)

### 1. Планирани дейности (от проектното предложение).

#### *Дейност 1.2*

- Дефиниране на структура на Коши-Риман върху 7-мерното подмногообразие на обобщеното туйсторно пространство, което е дифеоморфно на пространството от двойките анти-комутиращи комплексни структури върху допирателните пространства на 4-мерно ориентирано Риманово многообразие, които пораждат ориентация на многообразието.
- Пресмятане тензорът на Найенхюйс на тази структура.
- Намиране на условията върху базовото многообразие за анулиране на тензора на Найенхюйс.

#### *Дейност 1.3*

- Дефиниране на почти контактна метрична структура върху 7-мерното подмногообразие на обобщеното туйсторно пространство на 4-мерно Риманово многообразие.
- Пресмятане тензорът на Найенхюйс на тази структура.
- Намиране на условията върху базовото многообразие за анулиране на тензора на Найенхюйс.

#### *Дейност 1.4*

Оформяне на получените резултати и подготовка на статии по този пакет.

### 2. Осъществени дейности през отчитания етап.

През периода са направени някои предварителни пресмятания по темата.

### 3. Очаквани резултати (от проектното предложение).

Намиране на геометрични условия върху базовото 4-мерно Риманово многообразие, при които структурата на Коши-Риман е интегрируема.

Намиране на кривинни условия върху базовото 4-мерно Риманово многообразие, при които почти контактната структура е нормална.

Публикуване на статии в математически списания с импакт фактор.

#### **4. Постигнати резултати през отчитания етап.**

Подготвена и публикувана е статията [DM] с обзореен характер върху геометрията на класическите туисторни пространства.

#### **5. Обяснение, ако част от дейностите не са осъществени, част от резултатите не са постигнати, или са постигнати допълнителни резултати повече от очакваните.**

Направените разглеждания показваха, че е добре насоката на изследванията да се измени и да се установят условията, при които изследваното многообразие притежава 3- $(\alpha, \delta)$ -структура като обобщение на 3-Сасакиевите структури. Това изисква по-продължителна работа и бе преценено, че е по-добре усилията да се насочат в работа по работен пакет 2, където се очертаха възможности за разширяване на тематиката.

### **Работен пакет 2. Свойства на почти Ермитови структури като изображения в туисторни пространства (от месец 19 до месец 30)**

#### **1. Планирани дейности (от проектното предложение).**

##### *Дейност 2.1*

- Пресмятане на втората основна форма на изображението от почти Ермитово многообразие в неговото туисторно пространство, дефинирано от почти комплексната структура на многообразието.
- Намиране на условията за анулиране на втората основна форма.
- Намиране на условията за анулиране на  $(1,1)$ -частта на втората основна форма.

##### *Дейност 2.2*

Пресмятане на формата, въведена от Jost и Yau за изображението, определено от почти комплексната структура.

##### *Дейност 2.3*

Оформяне на получените резултати и подготовка на статии по този пакет.

#### **2. Осъществени дейности през отчитания етап.**

Всяка съвместима почти комплексна структура върху Риманово многообразие може да се разглежда като гладко изображение  $J$  от многообразието в неговото туисторно пространство, снабдено с естествена Риманова метрика, дефинирана чрез метриката на базовото многообразие или като изображение  $J$  на сферичното допирателно пространство на многообразието в себе си, като това пространство снабдим с метриката на Сасаки. Условията, при които изображението  $J$  е хармонично, са намерени от Davidov-Ul Naq-Mushkarov. В статия [DS-1] J. Davidov и K. Shakoov показват, че ако

изображението  $J$  на сферичното разслоение е хармонично, то такава е и изображението  $J$  със стойности в туисторното пространство, обаче обратното твърдение не е вярно. Освен това са намерени геометрични условия, при които изображението  $J$  е хармонично, в случая, когато Римановото многообразие е от размерност четири.

В статия [D] са установени геометричните условия върху четиримерно Ермитово многообразие, снабдено с метрична свързаност с тотално анти-симетрична торзия, при които комплексната структура е хармонично изображение от многообразието в неговото туисторно пространство, разгледано с естествено семейство от Риманови метрики, дефинирани с помощта на метриката и свързаността на базовото многообразие..

Туисторните пространства на две конформни метрики съвпадат, така че туисторното пространство зависи от даден конформен клас Риманови метрики, а не от индивидуалните метрики в него. Ако една почти комплексна структура е съвместима с някоя метрика от конформния клас, тя е съвместима с всички метрики в класа. Следователно съвместимите комплексни структури върху конформно многообразие могат да се разглеждат като гладки изображения в неговото туисторно пространство. В рамките на конформната геометрия G. Kokarev въведе понятието за псевдо-хармонично изображение като разширение на понятието за хармонично изображение. В статията [DS-2] са намерени геометрични условия, при които една съвместима почти комплексна структура върху конформно многообразие, снабдено със свързаност на Вайл, определя псевдо-хармонично изображение от многообразието в неговото туисторно пространство. Полученият резултат обобщава предишен резултат на Davidov-Ul Naq-Mushkarov, споменат по-горе.

### ***3. Очаквани резултати (от проектното предложение).***

Установяване на геометричните свойства на почти Ермитовото многообразие, при които изображението, дефинирано чрез почти комплексната му структура е напълно геодезично или (1,1)-геодезично.

Намиране на условия, при които изображението, дефинирано чрез почти комплексната структура на почти Ермитово многообразие е Ермитово хармонично.

Публикуване на статии в математически списания с импакт фактор.

### ***4. Постигнати резултати през отчитания етап.***

Пресметната е втората основна форма на изображението от почти Ермитово многообразие в неговото туисторно пространство, дефинирано от почти комплексната структура на многообразието в случаите, когато то е снабдено с метрична свързаност с напълно анти-симетрична торзия или със свързаност на Вайл за даден конформен клас.

Втората форма е пресметната също така и в случая, когато почти комплексната структура се разглежда като изображение на сферичното разслоение на Риманово многообразие в себе си, като сферичното разслоение е снабдено с метриката на Сасаки.

В тези три случая е работено върху намиране на условията, при които изображението от многообразието в неговото туисторно пространство е хармонично.

- 5. *Обяснение, ако част от дейностите не са осъществени, част от резултатите не са постигнати, или са постигнати допълнителни резултати повече от очакваните.***

След пресмятанията на втората основна форма (дейност 2.1) бе преценено, че има възможност да се получат резултати в три направления, вместо в планираната една насока. Получените резултати са от тематичния кръг на работен пакет 2.

**Работен пакет 3. Частична интегруемост на почти комплексни структури (от месец 31 до месец 36)**

- 1. *Планирани дейности (от проектното предложение).***

#### *Дейност 3.1*

Получаване на описание в термините на кривината на Риманово многообразие за множествата  $F_k(J_f)$  на почти комплексни структури  $J_f$  върху туисторното пространство  $Z$  на многообразието, дефинирани чрез морфизъм  $f$  на  $Z$ .

#### *Дейност 3.2*

Намиране на описание от алгебричен характер на множествата  $F_k(J)$  за инвариантни симплектични почти комплексни структури върху обобщените групи на Hizenberg и нил-многообразия, определени от двустепенни нилпотентни групи на Ли.

#### *Дейност 3.3*

Оформяне на получените резултати и подготовка на статия по този пакет.

- 2. *Осъществени дейности през отчитания етап.***

Въпросът за частична интегруемост на почти комплексни структури е решен напълно за различни фамилии от почти комплексни структури върху туисторното пространство на ориентирано 4-мерно Риманово многообразие, определени от морфизми на туисторното разслоение. В пълна общност тези почти комплексни структури са въведени от G. Deschamps в 2011 г., но трябва да се отбележи, че за първи път структури от този вид са използвани от LeBrun в 1999 г. за доказателство на факта, че числата на Чърн  $c_1^3$  и  $c_1 \cdot c_2$  на 3-мерно компактно комплексно многообразие не са определени от топологията на подлежащото гладко многообразие. Разглежданите почти-комплексни структури са естествено обобщение на известните структури на Atiyah-Hitchin-Singer и Eells-Salamon и са изследвани от диференциално-геометрична гледна точка от Deschamps и Davidov-Ali--Mushkarov.

Получените резултати са свързани с определянето на холоморфните типове на почти комплексните структури на G. Deschamps в случаите на Ермитови и на Келерови повърхнини. В първия случай съответните  $IJ$ -разслоения и множествата  $F_k(J)$ , определящи холоморфните типове на разглежданите почти комплексни структури са описани геометрично в термините на спектъра на автодуалния тензор на Вайл, а във втория чрез нулевото множество на скаларната кривина на базовото многообразие. Те обобщават известните резултати на G. Deschamps на интегруемост на почти комплексни структури, определени от морфизми на туисторното разслоение.

През отчетния период са продължени изследванията върху ляво-инвариантните почти комплексни структури върху групата от афинните трансформации на Евклидово пространство, които са съвместими с ляво-инвариантна симплектична структура. Работната хипотеза е, че всяка такава почти комплексна структура има нулев холоморфен тип. Тя е мотивирана от известния резултат на Y. Agaoka, че афинните групи имат единствена симплектична структура с точност до присъединеното действие, а също и от проведените изчисления за някои конкретни почти комплексни структури. Проведените изследвания в тази насока показват, че хипотезата е вярна и за редица естествени еднопараметрични фамилии от ляво-инвариантни почти комплексни структури, които са съвместими с каноничната симплектична структура на афинната група.

### **3. Очаквани резултати (от проектното предложение).**

Намиране на геометрични условия върху базовото многообразие за частична интегруемост на  $J_f$ . Определяна на холоморфния тип на  $J_f$ .

Установяване на холоморфния тип и намиране на алгебрични условия за частична интегруемост на инвариантните симплектични почти комплексни структури.

Публикуване на статии в математически списания с импакт фактор.

### **4. Постигнати резултати през отчитания етап.**

Във връзка с Дейност 3.1 са получени експлицитни формули за тензора на Найенхой на почти комплексни структури  $J_f$  върху туисторното пространство на 4-мерно ориентирано Риманово многообразие определени от морфизми на туисторното разслоение. С тяхна помощ са получени геометрични описания на  $IJ_f$ -разслоенията над съответното туисторно пространство и на множествата  $F_k(J_f)$  от точките в околност, на които съществуват  $k$  на брой  $J_f$  – холоморфни функции.

Във връзка с Дейност 3.2 е намерено подходящо за пресмятания описание на каноничната ляво-инвариантна симплектична форма върху афинната група и са получени алгебрични формули за тензорите на Найенхой на естествена фамилия от съвместими с тази симплектична форма ляво-инвариантни почти комплексни структури.

Получените по Дейност 3.1 резултати са оформени в статията [M2], която е излязла от печат. Подготвен и излязъл от печат е и обзор [M1] върху частична интегрируемост на почти комплексни структури.

**5. *Обяснение, ако част от дейностите не са осъществени, част от резултатите не са постигнати, или са постигнати допълнителни резултати повече от очакваните.***

Изследванията по Дейност 3.2 бяха съсредоточени върху доказването на работната хипотеза от предния параграф. Те показаха нейната правдоподобност, но доказателството в общия случай все още не е завършено поради възникналите затруднения от изчислителен характер. За тяхното преодоляване се налага създаването на специализиран софтуер за символни пресмятания, който да бъде използван за определяне на ранга на тензора на Найенхюй на ляво-инвариантна почти комплексна структура върху група на Ли.

**Работен пакет 4. Свойства на притискащата функция (от месец 19 до месец 36)**

**1. *Планирани дейности (от проектното предложение):***

***Дейност 4.3***

Изучаване на равнинни области с изброимо много „дупки“, чиято притискаща функция е ограничена отдолу с положителна константа.

***Дейност 4.4***

Изучаване на равнинни области, за които притискащата функция е ограничена отдолу с положителна константа – общ случай.

***Дейност 4.5***

Подготовка на статии с резултатите, получени в рамките на този пакет.

**2. *Осъществени дейности през отчитания етап.***

Въведен е проективен аналог на притискащата функция. С негова помощ са класифицирани строго изпъкналите области с некомпактни групи от проективни автоморфизми.

Получени са необходими и достатъчни условия за видимост на геодезичните на разстоянието на Кобаяши на изпъкнали области.

Оценени са диаметрите на геодезична на разстоянието на Кобаяши на изпъкнали области от краен тип с цел Хьолдерово продължаване до границата на изометрии.

**3. *Очаквани резултати (от проектното предложение)***

Получаване на описание на равнинните области с изброимо много „дупки“, чиято притискаща функция е ограничена отдолу с положителна константа.

Описание на всички равнинни области, за които притискащата функция е ограничена отдолу с положителна константа.

Публикуване на статии в математически списания с импакт фактор.

#### ***4. Постигнати резултати през отчитания етап.***

Установени са различни свойства на проективния аналог на притискащата функция и е доказана количествена локализация на притискащата функция около плюрисубхармонична бариера.

Получени са оценки за ръста на разстоянието на Кобаяши около гранични точки на изпъкнали области с приложения към т. нар. visibility property.

Получени са нови локализационни резултати за разстоянието на Кобаяши. Като следствие са сравнени разстоянията на Кобаяши и Каратеодори върху строго псевдоизпъкнали области.

### **Работен пакет 5. Диференциална геометрия на двумерни подмногообразия в плоски 4-мерни пространства (от месец 19 до месец 36)**

#### ***1. Планирани дейности (от проектното предложение):***

##### ***Дейност 5.2***

Изучаване на квази-минимални повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика.

##### ***Дейност 5.3***

Изучаване на минимални повърхнини в 4-мерно пространство на Минковски.

##### ***Дейност 5.4***

Оформяне на получените резултати и подготовка на статии по този пакет.

#### ***2. Осъществени дейности през отчитания етап.***

Квази-минималните повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика са аналог на т. нар. marginally trapped повърхнини в пространство-времето на Минковски. Идеята за marginally trapped повърхнините е въведена от R. Penrose (1965) във връзка с изучаване на теорията на черните дупки, която е пряко свързана с Айнщайновата теория на относителността. Във физиката, една повърхнина в 4-мерното пространство-време се нарича marginally trapped, ако е затворена, пространствено-подобна и векторът на средна кривина във всяка точка е изотропен. Основен проблем при изучаването на черните дупки е описанието на повърхнината,

която разделя семейството на “trapped” повърхнините от семейството на “untrapped” повърхнините. От математическа гледна точка, marginally trapped повърхнините разделят семейството на повърхнините с време-подобен вектор на средната кривина от семейството на повърхнините с пространствено-подобен вектор на средната кривина. Квази-минималните повърхнини в 4-мерното псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика  $R_2^4$  са Лоренцови повърхнини със светлинно-подобен (изотропен) вектор на средната кривина.

Нашият подход за изучаване на квази-минималните Лоренцови повърхнини се основава на въвеждане на подходящи параметри върху квази-минимална повърхнина в  $R_2^4$ . На базата на въведените специални параметри са изведени формули на Френе и условия за интегрируемост на квази-минимална повърхнина. Доказана е фундаментална теорема за съществуване и единственост на основния клас квази-минимални Лоренцови повърхнини в  $R_2^4$ . Класът на квази-минималните повърхнини, за които Гаусовата кривина  $K$  и кривината на нормалната свързаност  $K^\perp$  удовлетворяват условието  $K^2 - K^{\perp 2} \neq 0$ , са характеризирани чрез пет функции, удовлетворяващи система от четири ЧДУ. Тези резултати са публикувани в статията [AM].

От своя страна, квази-минималните и marginally trapped повърхнините са естествено обобщение на минималните (максималните) повърхнини в  $R_2^4$  и  $R_1^4$ , които са основен обект за изследване в диференциалната геометрия на повърхнините. Една повърхнина е минимална, ако векторът на средната кривина във всяка точка е нулев. При изучаването на минималните повърхнини се използват не само геометрични методи, но и методи от частните диференциални уравнения, както и от комплексния анализ, поради което теорията на минималните повърхнини представлява интерес не само за математици, но и за физици и инженери.

Основна част от изследванията по този пакет са посветени на изучаване на двумерни минимални времеподобни повърхнини в  $n$ -мерно Лоренцово пространство и 4-мерно псевдо-евклидово пространство с неутрална метрика  $R_2^4$ . В статията [GK-1] са въведени канонични параметри върху минималните времеподобни повърхнини в произволно  $n$ -мерно Лоренцово пространство и е доказано съществуване и единственост на тези параметри. Върху всяка времеподобна повърхнина е въведена специална комплексна функция, дефинирана в алгебрата на двойните числа, и е показано, че каноничните координати върху една минимална времеподобна повърхнина се характеризират с естествено условие за тази комплексна функция. В статията [GK-2] се изучават минимални времеподобни повърхнини без изродени точки. Те са разделени на три типа. За повърхнините от трите типа е доказано, че допускат канонични параметри и тяхната геометрия се определя от Гаусовата кривина и нормалната кривина на повърхнината, които удовлетворяват система от две частни диференциални уравнения.

В статията [KM] е получено Вайерщрасово представяне чрез канонични параметри на минималните Лоренцови повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика и е дадено експлицитно решение на системата ЧДУ, описваща минималните Лоренцови повърхнини. С помощта на каноничното Вайерщрасово представяне са конструирани примери на минимални повърхнини.



Изучаването на класа на минималните Лоренцови повърхнини в  $R_2^4$  чрез Вайерщрасови представяния продължава и в статия [ККМ-2], където на базата на тези представяния са получени в явен вид всички решения на системата ЧДУ, описваща минималните повърхнини в  $R_2^4$ .

Идеята за въвеждане на канонични параметри е приложена и за класа на Лоренцовите (времеподобните) повърхнини в 3-мерно пространство на Минковски. Въведени са специални изотропни параметри и е доказана фундаментална теорема за съществуване и единственост за този клас повърхнини. Разгледани са два специални подкласа - класа на Лоренцовите повърхнини с постоянна средна кривина и класа на минималните Лоренцови повърхнини. Резултатите са публикувани в статията [ККМ-1].

### ***3. Очаквани резултати (от проектното предложение)***

Доказване на фундаментална теорема за съществуване и единственост за квази-минимални повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика.

Намиране на Вайерщрасови представяния на минимални повърхнини в 4-мерно пространство на Минковски.

Публикуване на статии в математически списания с импакт фактор.

### ***4. Постигнати резултати през отчетания етап.***

*Резултати, предвидени в проектното предложение:*

Въведени са специални параметри върху квази-минимална повърхнина в  $R_2^4$  и са изведени формули на Френе и условия за интегрируемост на квази-минимална повърхнина. Доказана е фундаментална теорема за съществуване и единственост на основния клас квази-минимални Лоренцови повърхнини в  $R_2^4$ , а именно класът, за който Гаусовата кривина  $K$  и кривината на нормалната свързаност  $K^\perp$  удовлетворяват условието  $K^2 - K^{\perp 2} \neq 0$ . Този клас повърхнини е характеризирани чрез пет функции, удовлетворяващи система от четири ЧДУ.

Получени са Вайерщрасови представяния чрез канонични параметри на минималните Лоренцови повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика, аналогични на представянията на минималните повърхнини в 4-мерно пространство на Минковски, получени от Г. Ганчев и К. Кънчев през първия етап.

*Допълнителни резултати, свързани с проекта:*

С помощта на каноничното Вайерщрасово представяне са конструирани примери на минимални Лоренцови повърхнини в  $R_2^4$ . На базата на тези представяния са получени експлицитни решения на системата ЧДУ, описваща минималните повърхнини в  $R_2^4$ .

Въведени са специални изотропни параметри и за класа на Лоренцовите (времеподобните) повърхнини в 3-мерно пространство на Минковски и е доказана фундаментална теорема за съществуване и единственост за този клас повърхнини.

Въведени са канонични параметри върху минималните времеподобни повърхнини в произволно  $n$ -мерно Лоренцово пространство. Върху всяка времеподобна повърхнина е въведена специална комплексна функция, дефинирана в алгебрата на двойните числа, и е получена характеристика на каноничните координати чрез естествено условие за тази комплексна функция.

5. *Обяснение, ако част от дейностите не са осъществени, част от резултатите не са постигнати, или са постигнати допълнителни резултати повече от очакваните.*

Постигнатите допълнителни резултати извън предвидените в този пакет са от същия тематичен кръг. Те допълват теорията на минималните повърхнини в плоски 4-мерни пространства с различна сигнатура и връзката ѝ с Вайерщрасовите представяния.

## II. Представяне на научните резултати

### 1. Научни публикации по проекта (публикувани, или приети за печат):

- в списания с импакт фактор (ИФ):

- 1.1. [DS-1] **J. Davidov**, K. Shakoov, *Almost Hermitian structures defining harmonic maps on the unit tangent bundle*, J. Geom. Phys. **160** (2021), Article 103988, ISSN:0393-0440, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2020.103988>, **IF(2020): 1.249, (Q2)**
- 1.2. [D] **J. Davidov**, *Harmonic Hermitian structures on Riemannian manifolds with skew-torsion*, accepted for publications in Mediterranean Journal of Mathematics, 2021, ISSN:1660-5446, **IF(2020): 1.400 (Q2)**
- 1.3. [DM] **J. Davidov**, **O. Mushkarov**, *Curvature properties of twistor spaces*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 311 (2020), 78-97, Published: 02 February 2021. <https://doi.org/10.1134/S008154382006005X>, **IF(2020): 0.478, (Q4)**
- 1.4. [M1] **O. Mushkarov**, *Partially integrable almost complex structures*, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 311 (2020), 214-224, Published: 02 February 2021. <https://doi.org/10.1134/S0081543820060139>, **IF(2020): 0.478, (Q4)**
- 1.5. [M2] **O. Mushkarov**, *Partial integrability of compatible almost complex structures on twistor spaces*, Mediterr. J. Math. 18, 94 (2021), ISSN:1660-5446, <https://link.springer.com/article/10.1007/s00009-021-01698-5>, **IF(2020): 1.400 (Q2)**
- 1.6. [NV] **N. Nikolov**, K. Verma, *On the squeezing function and Fridman invariant*, J. Geom. Anal. 30 (2020), No 2, 1218-1225. <https://doi.org/10.1007/s12220-019-00237-9>, **IF(2020): 1.183, (Q2)** (статията е включена в отчета за първия етап като препринт в ArXiv)
- 1.7. [NT-1] **N. Nikolov**, P. J. Thomas, *An analogue of the squeezing function for projective maps*, Ann. Mat. Pura Appl. (2020) 199: 1885-1894, DOI:1007/s10231-

- 020-00947-w. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10231-020-00947-w>,  
**IF(2020): 0.969, (Q2)**
- 1.8. [BNT]<sup>1</sup> F. Bracci, **N. Nikolov**, P.J. Thomas, *Visibility of Kobayashi geodesics in convex domains and related properties*, Math. Z. (2022), doi:10.1007/s00209-022-02978-w, <https://link.springer.com/article/10.1007/s00209-022-02978-w>,  
**IF(2020): 0.964, (Q2)**
- 1.9. [FN] J.E. Fornæss, **N. Nikolov**, *Strong localization of invariant metrics*, Mathematische Annalen (2021), doi:10.1007/s00208-021-02201-x, <https://link.springer.com/article/10.1007/s00208-021-02201-x>, **IF(2020): 1.534, (Q1)**
- 1.10. [NT-2] **N. Nikolov**, P.J. Thomas, *Growth of Sibony metric and Bergman kernel for domains with low regularity*, J. Math. Anal. Appl. 499 (2021), Article 125018, <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X21000974>,  
**IF(2020): 1.583, (Q1)**
- 1.11. [KM] Kassabov, O., **V. Milousheva**, *Weierstrass Representations of Lorentzian Minimal Surfaces in  $R^4_2$* , Mediterr. J. Math. Volume 17, issue 6, 199 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00009-020-01636-x>, ISSN: 1660-5446, **IF(2020): 1.400 (Q2)**
- 1.12. [KKM-1] Kanchev, K., Kassabov, O., **Milousheva, V.**, *Canonical Coordinates and Natural Equation for Lorentz Surfaces in  $R^3_1$* . Mathematics 2021, 9 (23), 3121. <https://doi.org/10.3390/math9233121>, ISSN: 2227-7390, **IF(2020): 2.258 (Q1)**
- 1.13. [KKM-2] Kanchev, K., Kassabov, O., **Milousheva, V.**, *Explicit solving of the system of natural PDEs of minimal Lorentz surfaces in  $R^4_2$* , Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 510, Issue 1, 2022, 126017, <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2022.126017>, **IF(2020): 1.583, (Q1)**
- 1.14. [GK-2] **G. Ganchev**, K. Kanchev, *Canonical coordinates and natural equations for minimal time-like surfaces in  $R^4_2$* . Kodai Math. J. 43 (3) (2020), 524-572. <https://doi.org/10.2996/kmj/1605063628>, **IF(2020): 0.262 (Q4)**
- в други издания:
- 1.15. [AM] **Y. Aleksieva, V. Milousheva**, *Quasi-minimal Lorentz surfaces in Pseudo-Euclidean 4-space with Neutral Metric*, Serdica Math. J. 46 (2020), 151–164. ISSN 1310-6600. [http://www.math.bas.bg/serdica/n2\\_20.html](http://www.math.bas.bg/serdica/n2_20.html), MathSciNet, Zentralblatt
- 1.16. [GK-1] **G. Ganchev**, K. Kanchev, *Canonical coordinates on minimal time-like surfaces in the n-dimensional Lorentzian space*. Serdica Math. J., 45 (2019), 4, 341-372. ISSN 1310-6600. [http://www.math.bas.bg/serdica/n4\\_19.html](http://www.math.bas.bg/serdica/n4_19.html), MathSciNet, Zentralblatt
- в депозитни бази данни (ръкописи на публикации, изпратени за печат):
- 1.17. [DS-2] **J. Davidov**, K. Shakoov, *Pseudo-harmonic Hermitian structures on Weyl manifolds*, submitted to a journal with impact-factor

---

<sup>1</sup> Приносът на проекта в тази публикация е 50 %, а във всички останали е 100 % (не се финансират от други проекти).

## 2. Участия в научни форуми, на които са представени резултати от проекта

Поради Covid-пандемията възможностите за представяне на резултатите на научни форуми през втория етап бяха силно ограничени. Въпреки това, научни доклади, съдържащи резултати по проекта, бяха изнесени на следните конференции и семинари.

- 2.1. **N. Nikolov**, *Strong localization of invariant metrics*, Seminar on Complex Analysis, meeting 2257, November 4, 2019, Kraków, Poland, <http://www2.im.uj.edu.pl/katedry/complex/arch/abstracts/1920/2257.pdf>
- 2.2. **N. Nikolov**, *Quantitative localization and comparison of invariant distances of domains in  $C^n$* , INdAM Workshop 2021 “Gromov hyperbolicity and negative curvature in complex analysis”, Palazzone Scuola Normale Superiore, Cortona Italy, 6–10 September 2021, <https://www.youtube.com/watch?v=eGhnP3xUgMU>
- 2.3. **N. Nikolov**, *Suita conjecture*, New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences (NTADES), 1–4 July 2019, St. Constantine and Helena, Bulgaria. <https://math.bas.bg/event/ntades-2019>
- 2.4. **V. Milousheva**, *Local Theory of Surfaces with Parallel Normalized Mean Curvature Vector Field in Pseudo-Euclidean 4-Space*, Differential Geometry and its Applications, Hradec Králové, Czech Republic, September 2 – 6, 2019, [http://dga2019.uhk.cz/PROGRAMME\\_NEW.pdf](http://dga2019.uhk.cz/PROGRAMME_NEW.pdf)
- 2.5. **V. Milousheva**, *Quasi-minimal (marginally trapped) Lorentz surfaces in pseudo-Euclidean 4-space with neutral metric*, Seminar Informal de Noutăți Geometrice (SING), Universitatea “Alexandru Ioan Cuza” din Iași, October 23, 2020, Iasi, Romania, <https://www.math.uaic.ro/index.php?lb=0&id=717>
- 2.6. **V. Milousheva**, *Marginally trapped (quasi-minimal) surfaces in pseudo-Euclidean 4-spaces*, Women in Mathematics in South-Eastern Europe, December 10 – 11, 2020, Sofia, Bulgaria, <https://icms.bg/women-in-math-2020/>
- 2.7. **V. Milousheva**, *Minimal Lorentz surfaces in pseudo-Euclidean 4-space with neutral metric and their canonical Weierstrass representation*, Geometry and Homological Mirror Symmetry, International Laboratory for Mirror Symmetry and Automorphic Forms, HSE National Research University, Sirius Mathematics Center, Sochi, December 11 – 14, 2021, Sochi, Russia, [https://ms.hse.ru/data/2021/12/20/1776728188/Program\\_016w.pdf](https://ms.hse.ru/data/2021/12/20/1776728188/Program_016w.pdf)
- 2.8. **V. Bencheva**, *Applications of the barycentric geometry to the elliptic curves*, Национален семинар по теория на кодирането „Професор Стефан Додунеков”, 21 – 24 ноември 2019, <https://tinyurl.com/4bfhj6h6>
- 2.9. **V. Bencheva**, *General Rotational Surfaces in Pseudo-Euclidean 4-Spaces*, Общ семинар на секция „Анализ, геометрия и топология“, юни 2021, <https://tinyurl.com/bdbtae6e>

## 3. Популяризиране на резултати от проекта в обществото

Резултати от изпълнението на проекта бяха популяризирани на *Седмица на бенефициентите на ФНИ*, която се проведе от 1 до 5 юли 2019 г. в Технически университет София. Проектът „Риманова и комплексна геометрия“ бе представен от

ръководителя проф. В. Милушева в сесията „Математически науки и информатика“ на 04.07.2019 г. В презентацията бяха представени членовете на научния колектив, целите на проекта, работните пакети и постигнатите резултати от изпълнението му през първия етап.

Проектът беше представен и на изложба, организирана от Института по математика и информатика във връзка с тържествените чествания на 150-годишнината на Българската академия на науките. Изложбата беше озаглавена „ИМИ представя своите проекти“ и беше разположена във файетата на института през есента на 2019 г.

Информация за целите на проекта, научния екип, публикации, постигнати резултати и отчети се намира на уеб-сайта на проекта <https://math.bas.bg/rcgeometry/>.

За разбиране на резултатите по същество се изисква добро познаване на използваните термини и сериозна научна подготовка. Затова, популяризирането сред специалисти в областта на проекта се извършва чрез представянето на получените резултати на научни конференции, семинари и други мероприятия, както и чрез лични комуникации.

### **III. Други резултати от проекта**

#### **1. Отчет за изпълнение на Плана за експлоатация на научните резултати от изпълнението на проекта.**

Научната дейност по проекта е съпроводена с провеждане на работни срещи, на които членовете на колектива представят получените резултати, както и срещаните трудности при решаването на поставените цели и задачи. По този начин се улеснява обмена на идеи между участниците като се подпомага по-нататъшната работа по проекта.

Основната цел на осъществените посещения на световноизвестни чуждестранни учени по покана на екипа на проекта е обмяна на идеи и съвместна работа върху теми от научната програма на проекта. В резултат на тази съвместна работа са публикувани няколко съвместни публикации, а други се подготвят за публикуване.

През втория етап на проекта са осъществени няколко командировки в чужбина на членове на екипа (в Храдец Кралове, Краков, Москва, Сочи, Кортон) за участие в научни мероприятия. С цел както на популяризиране на получените нови резултати, така и да бъде получена обратна информация за тях, членовете на колектива са участвали с доклади в **7** международни научни мероприятия и **2** национални семинара.

Като конкретен резултат със съществен потенциал за по-нататъшното разпространение и приложение на получените резултати можем да посочим публикуваните (или приети за публикуване) общо **17** статии в престижни международни списания в областта на математиката и математическата физика, от които **14** в списания с импакт фактор (от тях **11** статии са в списания категория **Q1** или **Q2**). Получените резултати могат да бъдат приложени в по-нататъшни разработки в областта на

геометричната теория на многомерния комплексен анализ, геометрията на комплексните многообразия, теорията на минималните и квази-минималните повърхнини и в други области на математиката и физиката.

## **2. Повишаване на научния капацитет и подготовката на млади учени.**

В рамките на проекта докторант Яна Алексиева успешно защити дисертационен труд за придобиване на образователна и научна степен „доктор“ на тема *„Лоренцови повърхнини в четиримерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика“*. Част от дейността по оформяне на дисертационния труд и подготовката му за защита са извършени в рамките на работен пакет 5. Към момента Яна Алексиева заема длъжност главен асистент във Факултета по математика и информатика на СУ „Св. Климент Охридски“.

В екипа на проекта участва младия учен Виктория Бенчева, която е задочен докторант на ИМИ – БАН в секция „Анализ, геометрия и топология“ по докторска програма *Геометрия и топология* в професионално направление 4.5. *Математика*. Участието ѝ в колектива допринася за натрупване на знания и научно-изследователски умения и е предпоставка за успешна подготовка, разработка и защита на дисертационния ѝ труд.

Работата по проекта допринася за получаване на нови знания и умения на всеки член на колектива, което пряко съдейства за повишаване на квалификацията му като изследовател. Повишаването на квалификацията на всеки член на колектива допринася за повишаване на капацитета и на базовата организация.

През 2021 г. чл.-кор. Олег Мушкарров бе избран за академик на Българската академия на науките в областта на математическите науки. Научните му изследвания и приноси са свързани с многомерен комплексен анализ, анализ върху комплексни и почти комплексни многообразия, комплексна диференциална геометрия, туисторна теория и математическо образование.

## **3. Развиване на научно сътрудничество.**

В колектива на проекта участват учени, които поддържат научни контакти с изтъкнати специалисти в областта на диференциалната геометрия и комплексния анализ и посещават известни математически центрове в чужбина с цел съвместна работа. Част от участниците в проекта работят в съавторство с колеги от САЩ, Англия, Франция, Русия, Турция, Румъния, Германия, Полша, Лахор.

През втория етап на проекта са осъществени гостувания на световноизвестни чуждестранни учени по покана на екипа на проекта, което допринася за ползотворна обмяна на идеи и съвместна работа върху част от планираните в проекта научни задачи. Гостували учени:

- проф. Армен Сергеев, Математически институт „Стеклов“, Москва,
- проф. Джон Ерик Форнес, Норвежки университет за наука и технологии, Трондхайм, Норвегия,
- проф. Паскал Тома, Университета „Пол Сабатие“ в Тулуза,
- Себастиан Даниел Торес Кленер, Чили,
- проф. Корнелия-Ливия Бежан, “Gh. Asachi” Technical University of Iasi, Румъния.

Членовете на колектива са гостували в чуждестранни математически центрове и са изнасяли доклади на редица международни конференции. Всичко това допринася за по-нататъшно разширяване и задълбочаване на научните контакти на членовете на екипа с известни чуждестранни учени в областта на диференциалната геометрия и многомерния комплексен анализ.

#### 4. Изследователски екип.

Научна степен, акад. длъжност	Име	Месторабота	Млад учен	Подпис
<i>Ръководител на научния колектив :</i>				
<b>Проф. д-р</b>	<b>Величка Милушева</b>	<b>ИМИ-БАН</b>		
<i>Участници в научния колектив:</i>				
<b>Чл.-кор. проф. дмн</b>	<b>Олег Мушкарров</b>	<b>ИМИ-БАН</b>		
<b>Чл.-кор. проф. дмн</b>	<b>Николай Николов</b>	<b>ИМИ-БАН</b>		
<b>Проф. дмн</b>	<b>Йохан Давидов</b>	<b>ИМИ-БАН</b>		
<b>Доц. д-р</b>	<b>Георги Ганчев</b>	<b>Асоцииран член на ИМИ-БАН</b>	<i>Починал през август 2020 г.</i>	
<b>Гл. ас. д-р</b>	<b>Яна Алексиева</b>	<b>СУ „Св. Климент Охридски“, докторант на ИМИ</b>	<b>ДО*</b>	
<b>Ас.</b>	<b>Виктория Бенчева</b>	<b>ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“, докторант на ИМИ</b>	<b>МУ, ДО</b>	

\*) В списъка на докторантите и младите учени са включени членовете на колектива на проекта, които са такива в началото на проекта.