

# Научен отчет

за първия етап (от 18 месеца) на проект

ДН 12/2 „Риманова и комплексна геометрия“

## I. Описание на осъществените изследвания и дейности по работните пакети

**Работен пакет 1. Геометрия на класически и обобщени туйсторни пространства** (от месец 1 до месец 12)

### 1. Планирани дейности (от проектното предложение).

#### *Дейност 1.1*

- Пресмятане тензорът на Найенхюйс на естествената почти комплексна структура върху обобщеното туйсторно пространство на 4-мерно многообразие, дефинирано с помощта на обобщена метрика върху него.
- Намиране на условията върху базовото многообразие за анулиране на този тензор.

#### *Дейност 1.2*

- Дефиниране на структура на Коши-Риман върху 7-мерното подмногообразие на обобщеното туйсторно пространство, което е дифеоморфно на пространството от двойките анти-комутиращи комплексни структури върху допирателните пространства на 4-мерно ориентирано Риманово многообразие, които пораждат ориентация на многообразието.
- Пресмятане тензорът на Найенхюйс на тази структура.
- Намиране на условията върху базовото многообразие за анулиране на тензора на Найенхюйс.

#### *Дейност 1.3*

- Дефиниране на почти контактна метрична структура върху 7-мерното подмногообразие на обобщеното туйсторно пространство на 4-мерно Риманово многообразие.
- Пресмятане тензорът на Найенхюйс на тази структура.
- Намиране на условията върху базовото многообразие за анулиране на тензора на Найенхюйс.

#### *Дейност 1.4*

Оформяне на получените резултати и подготовка на статии по този пакет.

### 2. Осъществени дейности през отчитания етап.

Понятието за обобщена комплексна структура е въведено от Nigel Hitchin и по-нататък развито от неговите ученици M. Gualtieri, G. Cavalcanti, F. Witt, както и от много

други математици и физици (включително самият Хитчин). Това понятие обединява в едно понятията за комплексна и симплектична структури и може да се разглежда като комплексен аналог на понятието за структура на Дирак, въведено от Т. Courant и А. Weinstein с цел обединяването на Поасоновата и симплектична геометрии. Всяка комплексна или симплектична структура определя обобщена комплексна структура. Има много примери на обобщени комплексни структури, които не могат да се получат по този начин. Някои от тях бяха получени с помощта на туисторния подход от Давидов-Мушкаров и Deschamps, както и от някои други автори. Преди началото на настоящия проект, конструкцията на Deschamps бе обобщена от Й. Давидов и поставена в рамките на по-общото понятие за обобщено туисторно пространство на многообразие, снабдено с обобщена метрика. Това пространство притежава четири естествени обобщени почти комплексни структури, чиито условия за интегрируемост бяха изследвани от Й. Давидов. В рамките на настоящия проект той довърши тези изследвания и показа, че за разлика от обичайните туисторни пространства, обобщените туисторни пространства притежават вътрешни аутоморфизми. Тези резултати са публикувани в статията [D-1].

Обобщеното туисторно пространство е дифеоморфно на разслоението-произведение  $Z \times Z$  на обичайното туисторно пространство  $Z$  на базовото многообразие. Това дава възможност да се дефинират четири естествени почти комплексни структури върху  $Z \times Z$  с помощта на метричната свързаност с анти-симетрична торзия. Тези структури не са произведение на почти комплексните структури върху  $Z$ . Две от тях могат да се разглеждат като аналог на почти комплексната структура на Atiyah-Hitchin-Singer, а другите две – като съответни на почти комплексната структура на Bells-Salamon. В случая, когато базовото многообразие е четиримерно и свързаността е с нулева торзия (т.е. тя е свързаност на Levi-Civita) условията за интегрируемост за една от четирите почти комплексни структури бе получена от френския математик G. Deschamps. В своя работа Й. Давидов също разгледа четиримерно базово многообразие (което е най-интересният случай), но за метрична свързаност с анти-симетрична торзия. Свързаност с тези свойства се появява естествено в обобщената геометрия, от която произлиза разглеждания проблем, понеже всяка обобщена метрика поражда метрична свързаност с анти-симетрична торзия. Давидов установи, че две от споменатите почти комплексни структури не са интегрируеми. За другите две структури, разгледани върху свързаните компоненти на  $Z \times Z$ , той получи условията за интегрируемост. На тези условия Давидов даде интерпретация в термините на геометрията на Вайл. Това му даде възможност да получи интересни примери на многообразия, удовлетворяващи условията за интегрируемост. Описаните резултати са основното съдържание на статията [D-2].

Разслоението-произведение  $P$  на положителното и отрицателно туисторно пространство на четиримерно ориентирано Риманово многообразие е една от четирите свързани компоненти на споменатото по-горе разслоение  $Z \times Z$ . Върху многообразието  $P$  Давидов дефинира четири Риманови структури на почти произведение. Подобно на класификацията на Gray-Hervela на почти Ермитовите многообразия, А. Naveira въведе 36 класа на многообразия с Риманова структура на почти произведение. По-късно О. Gil-Medrano формулира алгебрични условия върху ковариантната производна на

структурата на почти произведение като отбеляза, че условията, чрез които се определят класовете на Naveira, могат да се получат като се комбинират условията, въведени от нея. Давидов определи типа на Gil-Medrano и класовете на Naveira на въведените от него структури на почти произведение върху многообразието  $P$ . Той даде и геометрична интерпретация на съответните класове. По този начин той получи нови нетривиални примери на многообразия с Риманова структура на почти произведение. Резултатите по тази тема са оформени в статията [D-3].

Резултатите в статията [DM-1] на Давидов и Мушкаров са посветени на геометрията на класическите туисторни пространства на 4-мерни почти Ермитови многообразия, снабдени с почти комплексна структура  $J$ , която се получава чрез хоризонтално повдигане на структурата на базовото многообразие. В частност са намерени условията в термините на кривината на базовото многообразие, при които туисторното пространство има Ермитов тензор на Ричи. От този резултат и резултат на Ali-Davidov-Mushkarov следва, че единственият възможен Gray-Hervella-клас на туисторното пространство е клас  $G_2$ . Този резултат позволява да се конструират конкретни примери на почти Ермитови многообразия от клас  $G_2$  с Ермитов тензор на Ричи.

### ***3. Очаквани резултати (от проектното предложение).***

Намиране на експлицитна, независеща от координати формула за тензора на Найенхюйс.

Получаване на условия в термините на кривината на базовото 4-мерно многообразие, при които естествената почти комплексна структура е интегрируема.

Намиране на геометрични условия върху базовото 4-мерно Риманово многообразие, при които структурата на Коши-Риман е интегрируема.

Намиране на кривинни условия върху базовото 4-мерно Риманово многообразие, при които почти контактната структура е нормална.

Публикуване на статии в математически списания с импакт фактор.

### ***4. Постигнати резултати през отчитания етап.***

В рамките на настоящия проект бяха довършени изследвания върху обобщеното туисторно пространство, дефинирано от Й. Давидов, върху многообразие, снабдено с обобщена метрика (в смисъл на обобщената геометрия на N. Hitchin). Това пространство притежава четири естествени обобщени почти комплексни структури. В работата по проекта са намерени условията за интегрируемост на ограниченията на тези структури върху свързаните компоненти на обобщеното туисторно пространство. Също така е установено, че за разлика от обичайните туисторни пространства, обобщените туисторни пространства притежават вътрешни автомофизми.

С помощта на туисторната теория са конструирани многообразия с Риманова структура на почти произведение, на които са определени класовете на Gil-Medrano и Naveira. Носещото многообразие на тези структури е разслоението-произведение на положителното и отрицателното туисторни пространства на базовото многообразие. Дадена е специфична геометрична интерпретация на получените класове.

Обобщеното туисторно пространство е дифеоморфно на разслоението-произведение  $Z \times Z$  на обичайното туисторно пространство  $Z$  на базовото многообразие. Това дава възможност да се дефинират четири естествени почти комплексни структури върху  $Z \times Z$  с помощта на метричната свързаност с анти-симетрична торзия. В работата по проекта са намерени условията за интегруемост на тези структури в случая на четиримерно базово многообразие. На условията за интегруемост е дадена интерпретация в термините на геометрията на Вайл, чрез което са получени интересни примери на многообразия, удовлетворяващи тези условия.

Като резултат от работата по този пакет са публикувани (или приети за печат) 4 статии в математически списания с импакт фактор – статиите [D-1], [D-2], [D-3] и [DM-1].

**5. *Обяснение, ако част от дейностите не са осъществени, част от резултатите не са постигнати, или са постигнати допълнителни резултати повече от очакваните.***

Дейност 1.1 от първия етап на проекта бе разширена с довършване на изследванията върху обобщеното туисторно пространство и конструирането на многообразия с Риманова структура на почти произведение. Това, заедно с работата по планираната дейност, увеличи времето за работата по дейност 1.1, поради което по дейности 1.2 и 1.3 е извършена само предварителна работа.

**6. *Дейности по РП, които се предвиждат за следващ етап (ако има такъв) – от проектното предложение; ако са необходими промени в тях, те трябва да бъдат обосновани.***

През следващия етап ще продължи работата по дейности 1.2 и 1.3.

### **Дейност 1.2**

- Дефиниране на структура на Коши-Риман върху 7-мерното подмногообразие на обобщеното туисторно пространство, което е дифеоморфно на пространството от двойките анти-комутиращи комплексни структури върху допирателните пространства на 4-мерно ориентирано Риманово многообразие, които пораждат ориентация на многообразието.
- Пресмятане тензорът на Найенхюйс на тази структура.
- Намиране на условията върху базовото многообразие за анулиране на тензора на Найенхюйс.

### *Дейност 1.3*

- Дефиниране на почти контактна метрична структура върху 7-мерното подмногообразие на обобщеното туйсторно пространство на 4-мерно Риманово многообразие.
- Пресмятане тензорът на Найенхюйс на тази структура.
- Намиране на условията върху базовото многообразие за анулиране на тензора на Найенхюйс.

## **Работен пакет 2. Свойства на почти Ермитови структури като изображения в туйсторни пространства (от месец 13 до месец 30)**

### ***1. Планирани дейности (от проектното предложение).***

#### *Дейност 2.1*

- Пресмятане на втората основна форма на изображението от почти Ермитово многообразие в неговото туйсторно пространство, дефинирано от почти комплексната структура на многообразието.
- Намиране на условията за анулиране на втората основна форма.

#### *Дейност 2.2*

Пресмятане на формата, въведена от Jost и Yau за изображението, определено от почти комплексната структура.

#### *Дейност 2.3*

Оформяне на получените резултати и подготовка на статии по този пакет.

*Описаните по-горе дейности от проектното предложение са за периода от месец 13 до месец 30 на проекта.*

### ***2. Осъществени дейности през отчитания етап.***

Във връзка с работата по този пакет Давидов и Мушкарров написаха обзор [DM-2] върху резултатите, които досега са получили по темата. Основната част от планираните дейности по този пакет ще бъде извършена през втория етап на проекта.

### ***3. Очаквани резултати (от проектното предложение).***

Установяване на геометричните свойства на почти Ермитовото многообразие, при които изображението, дефинирано чрез почти комплексната му структура е напълно геодезично или (1,1)-геодезично.

Намиране на условия, при които изображението, дефинирано чрез почти комплексната структура на почти Ермитово многообразие е Ермитово хармонично.

Публикуване на статии в математически списания с импакт фактор.

#### ***4. Постигнати резултати през отчитания етап.***

Написан е обзор, в който са систематизирани получените досега резултати по темата.

#### ***5. Обяснение, ако част от дейностите не са осъществени, част от резултатите не са постигнати, или са постигнати допълнителни резултати повече от очакваните.***

По пакет 2 е извършена предварителна работа по систематизиране на получените досега резултати, а основната дейност ще бъде извършена през втория етап.

#### ***6. Дейности по РП, които се предвиждат за следващ етап (ако има такъв) – от проектното предложение; ако са необходими промени в тях, те трябва да бъдат обосновани.***

През следващия етап ще продължи работата по дейности 2.1 и 2.2.

#### ***Дейност 2.1***

- Пресмятане на втората основна форма на изображението от почти Ермитово многообразие в неговото туисторно пространство, дефинирано от почти комплексната структура на многообразието.
- Намиране на условията за анулиране на втората основна форма.

#### ***Дейност 2.2***

Пресмятане на формата, въведена от Jost и Yau за изображението, определено от почти комплексната структура.

**Работен пакет 3. Частична интегруемост на почти комплексни структури (от месец 31 до месец 36)**

*Дейностите по този пакет са планирани за втория етап от изпълнението на проекта, поради което няма да ги описваме тук.*

## Работен пакет 4. Свойства на притискащата функция (от месец 1 до месец 36)

### 1. Планирани дейности (от проектното предложение):

#### Дейност 4.1

Изследване на граничното поведение на притискащата функция (чрез използване на някои идеи на D. Ma) при предположение за гладкост между клас  $C^2$  и клас  $C^3$ .

#### Дейност 4.2

Изучаване на граничното поведение на притискащата функция (чрез използване на някои идеи на S. Fu) при предположение за гладкост между клас  $C^3$  и клас  $C^4$ .

#### Дейност 4.3

Изучаване на равнинни области с изброимо много „дупки“, чиято притискаща функция е ограничена отдолу с положителна константа.

#### Дейност 4.4

Изучаване на равнинни области, за които притискащата функция е ограничена отдолу с положителна константа – общ случай.

#### Дейност 4.5

Подготовка на статии с резултатите, получени в рамките на този пакет.

*Описаните по-горе дейности от проектното предложение са за целия период (от 36 месеца) на проекта.*

### 2. Осъществени дейности през отчитания етап.

През последните години редица свойства и приложения на притискащата функция бяха интензивно изследвани от K. Diederich, J. E. Fornæss, E. F. Wold, K.-T. Kim и много други автори. Една от централните теми е граничното поведение на притискащата функция, най-вече около строго псевдоизпъкнали точки. Друга важна задача относно притискащата функция е описанието на областите, за които притискаща функция е ограничена отдолу от положителна константа.

Една от целите на проекта е свързана с въпрос, поставен от K. Diederich, J. E. Fornæss и E. F. Wold: Каква е оптималната оценка (в термините на разстоянието до границата) за притискащата функция на дадена област около строго псевдоизпъкнала гранична точка при различни предположения за регулярност на границата.  $C^k$ -гладкият случай за  $k = 2, 3, 4$  е разгледан от тримата споменати по-горе автори.

В статията [NT-2] са установени оценки отдолу за притискащата функция на дадена област около  $C^{k,\alpha}$ -гладка строго псевдоизпъкнала гранична точка ( $k = 2, 3, 0 < \alpha < 1$ ). Като приложение е намерено граничното поведение на различни инварианти на Бергман.

В [NV] са установени неравенства между притискащата функция и инвариантите на Фридман на дадена област в  $C^n$ . Доказани са и нови свойства на тези инварианти (основно локализационни). С помощта на тези свойства са обобщени известни резултати за граничното поведение на притискащата функция, като същевременно доказателствата са съществено по-кратки.

Други изследвания, свързани с (бихоломорфни) инвариантни разстояния и функции, са направени от Н. Николов в [NT-1] и [NTh] съвместно с М. Trybula и Р. J. Thomas. Работено е по установяването на (не)хиперболичност по Громов на разстоянието на Кобаяши на различни области в  $C^n$ . Един от основните резултати гласи, че ако от ограничена  $C$ -изпъкнала област извадим краен брой хиперравнини, то получената област не е хиперболична относно разстоянието на Кобаяши [NT-1], с което обобщава подобен резултат за изпъкнали области. В [NTh] е доказано, че за всяка област в  $C^n$  обемът на Каратеодори-Айзенман е сравним с обема на индикатрисата на метриката на Каратеодори с точност до малка/голяма константа, зависещи само от  $n$ . Тогава многомерната хипотеза на Суита, доказана от Блоцки и Звонек, показва, че върху псевдоизпъкналите области тези обеми са сравними с ядрото на Бергман.

### ***3. Очаквани резултати (от проектното предложение)***

Получаване на оптимална оценка за притискащата функция на дадена област в термините на разстоянието до границата около строго псевдоизпъкнала гранична точка.

Получаване при предположение за гладкост между клас  $C^3$  и клас  $C^4$  на оптимална оценка за притискащата функция на дадена област в термините на разстоянието до границата около строго псевдоизпъкнала гранична точка.

Получаване на описание на равнинните области с изброимо много „дупки“, чиято притискаща функция е ограничена отдолу с положителна константа.

Описание на всички равнинни области, за които притискащата функция е ограничена отдолу с положителна константа.

Публикуване на статии в математически списания с импакт фактор.

### ***4. Постигнати резултати през отчитания етап.***

*Резултати, предвидени в проектното предложение:*

Установени са оценки отдолу за притискащата функция на дадена област около  $C^{k,\alpha}$ -гладка строго псевдоизпъкнала гранична точка ( $k = 2, 3, 0 < \alpha < 1$ ). Като приложение е намерено граничното поведение на различни инварианти на Бергман.

Установени са неравенства между притискащата функция и инвариантите на Фридман на дадена област в  $C^n$ .



*Допълнителни резултати, свързани с проекта:*

Доказано е, че ако от ограничена  $S$ -изпъкнала област извадим краен брой хиперравнини, то получената област не е хиперболична относно разстоянието на Кобаяши.

Доказано е, че обемът на Каратеодори-Айзенман е сравним с обема на индикатрисата на метриката на Каратеодори с точност до малка/голяма константа, зависещи само от  $n$ .

Като резултат от работата по този пакет са публикувани (или приети за печат) 4 статии в математически списания (3 от които са с импакт фактор) – статиите [NT-1], [NT-2M], [NTh] и [ANT].

- 5. *Обяснение, ако част от дейностите не са осъществени, част от резултатите не са постигнати, или са постигнати допълнителни резултати повече от очакваните.***

Постигнатите допълнителни резултати извън предвидените са от същия тематичен кръг.

- 6. *Дейности по РП, които се предвиждат за следващ етап (ако има такъв) – от проектното предложение; ако са необходими промени в тях, те трябва да бъдат обосновани.***

#### ***Дейност 4.3***

Изучаване на равнинни области с изброимо много „дупки“, чиято притискаща функция е ограничена отдолу с положителна константа.

#### ***Дейност 4.4***

Изучаване на равнинни области, за които притискащата функция е ограничена отдолу с положителна константа – общ случай.

**Работен пакет 5. Диференциална геометрия на двумерни подмногообразия в плоски 4-мерни пространства**

- 1. *Планирани дейности (от проектното предложение):***

#### ***Дейност 5.1***

Изучаване на повърхнини с паралелен нормиран вектор на средната кривина в 4-мерно Евклидово пространство или в пространство-време на Минковски.

### *Дейност 5.2*

Изучаване на квази-минимални повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика.

### *Дейност 5.3*

Изучаване на минимални повърхнини в 4-мерно пространство на Минковски.

### *Дейност 5.4*

Оформяне на получените резултати и подготовка на статии по този пакет.

*Описаните по-горе дейности от проектното предложение са за целия период (от 36 месеца) на проекта.*

## **2. Осъществени дейности през отчитания етап.**

Основен клас повърхнини в Римановата и псевдо-Римановата геометрия са повърхнините с паралелно векторно поле на средната кривина, които възникват като критични точки на естествени функционали и играят важна роля както в диференциалната геометрия, така и в теорията на хармоничните изображения и математическата физика. Повърхнини с паралелен вектор на средната кривина в Риманови пространства с постоянна кривина са класифицирани през 70-те години на миналия век от Chen и Yau. През последните години, особено актуални са изследвания върху Лоренцови повърхнини с паралелен вектор на средната кривина в псевдо-Евклидови пространства. Естествено обобщение на повърхнините с паралелен вектор на средната кривина са повърхнините с паралелен нормиран вектор на средната кривина. Докато в 3-мерното Евклидово пространство всяка повърхнина има паралелен нормиран вектор на средната кривина, то в произволно-мерно Евклидово и псевдо-Евклидово пространство има повърхнини с паралелен нормиран вектор на средната кривина, които не са с паралелен вектор на средната кривина. Известно е, че всяка аналитична повърхнина с паралелен нормиран вектор на средната кривина в  $m$ -мерното Евклидово пространство  $R^m$ ,  $m \geq 4$  или лежи в 4-мерно Евклидово пространство, или е минимална повърхнина върху хипер-сфера в  $R^m$ .

Една от дейностите по този работен пакет от проекта е посветена на изучаване локалната теория на повърхнини с паралелен нормиран вектор на средната кривина в 4-мерно Евклидово пространство или в пространство-време на Минковски. Върху такива повърхнини по геометричен начин са въведени специални изотермични параметри (наречени канонични), спрямо които коефициентите на първата основна форма имат инвариантен характер. Доказана е теорема за съществуване и единственост, която гласи, че всяка повърхнина с паралелно нормирано векторно поле на средната кривина се определя с точност до движение от три функции, удовлетворяващи система от три частни диференциални уравнения. Намерени са примери на повърхнини с паралелен нормиран вектор на средната кривина и експлицитни решения на съответните системи частни диференциални уравнения. Тези резултати са публикувани в статията [GM].

Друга основна дейност от този пакет е изучаване на квази-минимални повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика, които са аналог на т. нар. marginally trapped повърхнини в пространство-времето на Минковски. Идеята за marginally trapped повърхнините е въведена от R. Penrose (1965) във връзка с изучаване на теорията на черните дупки, която е пряко свързана с Айнщайновата теория на относителността. Във физиката, една повърхнина в 4-мерното пространство-време се нарича marginally trapped, ако е затворена, пространствено-подобна и векторът на средна кривина във всяка точка е изотропен. Основен проблем при изучаването на черните дупки е описанието на повърхнината, която разделя семейството на “trapped” повърхнините от семейството на “untrapped” повърхнините. От математическа гледна точка, marginally trapped повърхнините разделят семейството на повърхнините с време-подобен вектор на средната кривина от семейството на повърхнините с пространствено-подобен вектор на средната кривина. Квази-минималните повърхнини в  $R_2^4$  са Лоренцови повърхнини със светлинно-подобен (изотропен) вектор на средната кривина.

Нашият подход за изучаване на квази-минималните Лоренцови повърхнини се основава на въвеждане на подходящи параметри върху квази-минимална повърхнина в  $R_2^4$ . На базата на въведените специални параметри са изведени формули на Френе и условия за интегруемост на квази-минимална повърхнина. Целта е да се докаже фундаментална теорема за съществуване и единственост от тип Теорема на Боне на езика на инвариантни функции. Получените резултати за квази-минимални повърхнини ще бъдат докладвани на международната конференция *Differential Geometry and its Applications*, Hradec Králové, Czech Republic, September 2 – 6, 2019.

От своя страна, квази-минималните и marginally trapped повърхнините са естествено обобщение на минималните (максималните) повърхнини в  $R_2^4$  и  $R_1^4$ , които са основен обект за изследване в диференциалната геометрия на повърхнините. Една повърхнина е минимална, ако векторът на средната кривина във всяка точка е нулев. При изучаването на минималните повърхнини се използват не само геометрични методи, но и методи от частните диференциални уравнения, както и от комплексния анализ, поради което теорията на минималните повърхнини представлява интерес не само за математици, но и за физици и инженери.

В статията [AM] е разработена локална теория на минималните Лоренцови повърхнини в 4-мерното псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика на базата на въвеждане на каноничен придружаващ репер и канонични параметри. Минималните повърхнини, за които първото нормално пространство е двумерно и Гаусовата кривина  $K$  и кривината на нормалната свързаност  $K^\perp$  удовлетворяват условието  $K^2 - K^{\perp 2} > 0$  във всяка точка, са наречени минимални повърхнини от общ тип. Доказана е теорема за съществуване и единственост на минимална Лоренцова повърхнина от общ тип, която гласи че всяка такава повърхнина се определя еднозначно с точност до движение в  $R_2^4$  от две геометрични функции  $\mu$  и  $\nu$ , удовлетворяващи система от две частни диференциални уравнения. Като се използва алгоритъма, даден в доказателството на теоремата за съществуване и единственост, е показано как от едно конкретно решение

$(\mu, \nu)$  на системата частни диференциални уравнения може да се конструира пример на минимална Лоренцова повърхнина от общ тип. Тези резултати са включени в трета глава на дисертацията на Яна Алексиева, защитена през 2018 г. Основната част от резултатите, включени в статията [AM], са получени преди финансирането на проекта и са включени в първоначален вариант на статия в ArXiv, която е претърпяла няколко редакции, но в окончателен вид статията е приета в рамките на проекта и в нея е цитиран настоящият проект.

В статии [GK-1] и [GK-2] се изучават максимални пространствено-подобни повърхнини в 4-мерното псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика (сигнатура  $(4,2)$ ). Основа на използвания подход за изучаване на пространствено-подобните повърхнини в  $R_2^4$  е изграждане на аналитичен апарат с паралелно геометрично интерпретиране на получените резултати. Най-напред се изучават изродените точки върху една повърхнина и се характеризират чрез: 1) производната на основната комплексна функция; 2) равенство за двете основни инварианти на повърхнината; 3) елипсата на кривината за дадената повърхнина. Като се използва отъждествяването на 4-мерното пространство с комплексно двумерно пространство, снабдено със специална метрика, се доказва, че максималните пространствено-подобни повърхнини, състоящи се от изродени точки, могат да се отъждествят с холоморфните криви в това комплексно пространство. Изградена е теорията на холоморфните криви в това комплексно пространство от гледна точка на максималните пространствено-подобни повърхнини.

Следващата стъпка е изучаването на максималните пространствено-подобни повърхнини от общ тип (без изродени точки). Известно е, че всяка максимална пространствено-подобна повърхнина без изродени точки в 4-мерното пространство допуска локално геометрични параметри, които са частен случай на изотермични параметри. Спрямо такива параметри максималната повърхнина е определена еднозначно с точност до движение чрез Гаусовата и нормалната кривина, които удовлетворяват система от две частни диференциални уравнения (система от естествените уравнения на максималните пространствено-подобни повърхнини). Намерени са експлицитно решенията на тази система посредством двойка холоморфни функции в Гаусовата равнина. Намерена е връзката между две двойки холоморфни функции, определящи едно и също решение на системата от естествени уравнения. Въведено е понятието *канонично Вайерщрасово представяне* на максимална пространствено-подобна повърхнина и е доказано, че повърхнините от общ тип притежават локално такова представяне. Намерени са изрази на езика на основната комплексна функция за Гаусовата и нормалната кривина на повърхнината, което позволява да се даде пълно описание на максималните пространствено-подобни повърхнини посредством двойка холоморфни функции. Този резултат се интерпретира като експлицитно решаване на системата формули на Френе за разглеждания клас повърхнини. Ако се разгледат трите множества: 1) максималните пространствено-подобни повърхнини; 2) решенията на системата естествени уравнения (за двете кривини); 3) двойките холоморфни функции, то основният резултат се формулира така: намерени са естествени съответствия между трите множества 1), 2) и 3).

Доказано е, че всяка пространствено-подобна максимална повърхнина в 4-мерното псевдо-евклидово пространство със сигнатура (4,2) определя две максимални пространствено-подобни повърхнини в тримерно пространство на Минковски и обратно. Доказано е, че всяка минимална повърхнина в 4-мерно Евклидово пространство определя две минимални повърхнини в тримерно Евклидово пространство и обратно. Тези резултати имат за следствие как геометрията на минималните (максималните пространствено-подобни) повърхнини от тримерно Евклидово пространство (пространство на Минковски) определя геометрията на минималните (максималните пространствено-подобни) повърхнини в 4-мерния случай.

### ***3. Очаквани резултати (от проектното предложение)***

Получаване на система естествени частни диференциални уравнения, описваща класа на повърхнините с паралелен нормиран вектор на средната кривина.

Доказване на фундаментална теорема за съществуване и единственост за квази-минимални повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика.

Намиране на Вайерщрасови представяния на минимални повърхнини в 4-мерно пространство на Минковски.

Публикуване на статии в математически списания с импакт фактор.

### ***4. Постигнати резултати през отчитания етап.***

*Резултати, предвидени в проектното предложение:*

Получени са системи естествени частни диференциални уравнения, описващи класа на повърхнините с паралелен нормиран вектор на средната кривина в 4-мерно Евклидово пространство и в пространство-време на Минковски. Намерени са примери на повърхнини с паралелен нормиран вектор на средната кривина и експлицитни решения на съответните системи частни диференциални уравнения.

Въведени са специални параметри върху квази-минимална повърхнина в  $R_2^4$  и са изведени формули на Френе и условия за интегруемост на квази-минимална повърхнина. Това е подготовка към доказването на фундаментална теорема за съществуване и единственост за квази-минимални повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика, което е планирано за втория етап.

*Допълнителни резултати, свързани с проекта:*

Доказано е, че всяка максимална пространствено-подобна повърхнина в  $R_2^4$ , без изродени точки, притежава канонично Вайерщрасово представяне. Този резултат позволява експлицитно решаване на системата от естествени уравнения на максималните пространствено-подобни повърхнини, като общото решение на системата се представя чрез две холоморфни функции в Гаусовата равнина. Доказано е,

че всяка максимална пространствено-подобна повърхнина без изродени точки в  $R_2^4$  определя две максимални пространствено-подобни повърхнини в тримерно пространство на Минковски и обратно.

Като резултат от работата по този пакет са публикувани (или приети за печат) 3 статии в математически списания с импакт фактор – статиите [GM], [AM] и [GK-1].

**5. *Обяснение, ако част от дейностите не са осъществени, част от резултатите не са постигнати, или са постигнати допълнителни резултати повече от очакваните.***

Постигнатите допълнителни резултати извън предвидените в този пакет са от същия тематичен кръг.

**6. *Дейности по РП, които се предвиждат за следващ етап – от проектното предложение; ако са необходими промени в тях, те трябва да бъдат обосновани.***

През следващия етап ще продължи работата по дейности 5.1, 5.2 и 5.3.

#### ***Дейност 5.1***

Изучаване на повърхнини с паралелен нормиран вектор на средната кривина в 4-мерно Евклидово пространство или в пространство-време на Минковски.

#### ***Дейност 5.2***

Изучаване на квази-минимални повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика.

#### ***Дейност 5.3***

Изучаване на минимални повърхнини в 4-мерно пространство на Минковски.

По дейност 5.1 усилията ще бъдат съсредоточени към изучаване на времеподобни повърхнини с паралелен нормиран вектор на средната кривина в 4-мерно пространство на Минковски. По дейност 5.2 се планира да бъде доказана фундаментална теорема за съществуване и единственост за квази-минимални повърхнини в 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика и да бъдат намерени примери на квази-минимални повърхнини. По дейност 5.3 ще се изучават минимални и максимални повърхнини в 4-мерно пространство на Минковски и 4-мерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика. Въз основа на канонични параметри ще се получи канонично Вайерщрасово представяне за изучаваните повърхнини.

## II. Представяне на научните резултати

### 1. Научни публикации по проекта (публикувани, или приети за печат):

- в списания с импакт фактор (ИФ):

- 1.1. [D-1] J. Davidov, *Generalized metrics and generalized twistor spaces*, *Mathematische Zeitschrift* **291** (2019), 17-46, DOI: <https://doi.org/10.1007/s00209-018-2071-8> (ISSN: 1432-1823), **IF** (2018): **0.832**, (Q2), <https://link.springer.com/article/10.1007/s00209-018-2071-8>
- 1.2. [D-2] J. Davidov, *Product twistor spaces and Weyl geometry*, (2019), приета за печат в *Proc. Amer. Math. Soc.*, (ISSN:0029-9939) **IF** (2018): **0.813**, (Q2).
- 1.3. [D-3] J. Davidov, *Twistorial examples of Riemannian almost product manifolds and their Gil-Medrano and Naveira types*, приета за печат в *Int. J. Geom. Methods Modern Phys.*, (ISSN:0219-8878), **IF** (2018): **1.022** (Q3).
- 1.4. [DM-1] J. Davidov, O. Mushkarov, *Twistorial examples of almost Hermitian manifolds with Hermitian Ricci tensor*, *Acta Math. Hungar.* 156 (2018), 194-203, DOI:<https://doi.org/10.1007/s10474-018-0833-8>, (ISSN:0236-5294). **IF** (2018): **0.538**, (Q4), <https://link.springer.com/article/10.1007/s10474-018-0833-8>
- 1.5. [NT-1] N. Nikolov, M. Trybula, *Gromov hyperbolicity of the Kobayashi metric on C-convex dIFomains*, *J. Math. Anal. Appl.* 486 (2018), No 2, 1164-1178. **IF** (2018): **1.188**, (Q1), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022247X18307406>
- 1.6. [NT-2] N. Nikolov, M. Trybula, *Estimates for the squeezing function near strictly pseudoconvex boundary points with applications*, arXiv: 1808.07892, *J. Geom. Anal.* (to appear), **IF** (2018): **0.959**, (Q2) <https://arxiv.org/pdf/1808.07892.pdf>
- 1.7. [NTh] N. Nikolov, P. J. Thomas, *Comparison of the Bergman kernel and the Caratheodory-Eisenman volume*, *Proc. Amer. Math. Soc.*, DOI: 10.1090/proc/14604. **IF** (2018): **0.813**, (Q2), <https://www.ams.org/journals/proc/0000-000-00/S0002-9939-2019-14604-9/home.html>
- 1.8. [AM] Y. Aleksieva, V. Milousheva, *Minimal Lorentz surfaces in Pseudo-Euclidean 4-space with Neutral Metric*, *Journal of Geometry and Physics*, 142 (2019), 240-253, <https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2019.04.008>, ISSN: 0393-0440, **IF** (2018): **0.806**, (Q2), <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0393044019300713>
- 1.9. [GM] G. Ganchev, V. Milousheva, *Surfaces with Parallel Normalized Mean Curvature Vector Field in Euclidean or Minkowski 4-Space*, *Filomat Vol 33*, No 4 (2019), ISSN: 2406-0933, **IF** (2018): **0.789**, (Q2) <http://journal.pmf.ni.ac.rs/filomat/index.php/filomat/article/view/9338>
- 1.10. [GK-1] G. Ganchev, K. Kanchev, *Relation between the maximal space-like surfaces in  $R^4_2$  and the maximal space-like surfaces in  $R^3_1$* , *C. R. Acad. Bulg. Sci.*, 72 (2019), 6, 711-719. DOI:10.7546/CRABS.2019.06.02, ISSN: 1310-1331, **IF** (2018): **0.321**, (Q4)

- в други издания:

- 1.11. [DM-2] Й. Давидов, О. Мушкаров, *Хармонични почти комплексни структури*, Списание на БАН, 1 (2019), 13-18, ISSN:0007-3989.
- 1.12. [ANT] L. Andreev, N. Nikolov, M. Trybula, *Gromov hyperbolicity of the Kobayashi metric*, Pliska Stud. Math. 30 (2019), 21–28.  
<http://www.math.bas.bg/~pliska/Pliska-30/Pliska-30-2019-021-028.pdf>

- в депозитни бази данни (ръкописи на публикации, изпратени за печат):

- 1.13. [NV] N. Nikolov, K. Verma, *On the squeezing function and Fridman invariants*, arXiv: 1810.10739, <https://arxiv.org/abs/1810.10739>
- 1.14. [GK-2] G. Ganchev, K. Kanchev, *Weierstrass representations for maximal space-like surfaces in  $R^4_2$* , arXiv: 1906.09935v1, <https://arxiv.org/pdf/1906.09935.pdf>

## 2. Участия в научни форуми, на които са представени резултати от проекта

- 2.1. J. Davidov, *Harmonic almost Hermitian structures*, Differential Geometry Day 2018, October 5, 2018, Istanbul Technical University, Turkey
- 2.2. O. Mushkarov, *Partial Integrability of Almost Complex Structures*, Differential Geometry Day 2018, October 5, 2018, Istanbul Technical University, Turkey
- 2.3. O. Mushkarov, *Partial Integrability of Almost Complex Structures*, Complex Analysis and Mathematical Physics (Armen 70), Steklov Institute of Mathematics, Moscow, 18.03-22.03.2019
- 2.4. N. Nikolov, *Gromov hyperbolicity of the Kobayashi metric on  $C$ -convex domains*, International Conference „New Trends in the Applications of Differential Equations in Sciences”, June 2018, Sofia
- 2.5. Н. Николов, *Хипотеза на Суита*, Национален колоквиум по математика, 27.02.2019 г.
- 2.6. V. Milousheva, G. Ganchev, *Surfaces with Parallel Normalized Mean Curvature Vector Field in 4-Spaces*, XX Geometrical seminar, Vrnjačka Banja, Serbia, May 20 – 23, 2018
- 2.7. B. Bulca, V. Milousheva, *Meridian Surfaces with Parallel Normalized and Constant Mean Curvature in Pseudo-Euclidean 4-Space with Neutral Metric*, International Congress of Mathematicians ICM 2018, Rio de Janeiro, August 1–9, 2018
- 2.8. G. Ganchev, *Surfaces of constant mean curvature in  $R^3_1$  isometric to a given one and minimal surfaces in  $R^4$  strongly isometric to a given one*, International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, V. Tarnovo, September 4 – 8, 2018
- 2.9. V. Milousheva, *Meridian Surfaces with Parallel Normalized Mean Curvature Vector Field in Pseudo-Euclidean 4-Space with Neutral Metric*, International



Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, V. Tarnovo, September 4 – 8, 2018

- 2.10. V. Milousheva, Y. Aleksieva, *Minimal Lorentz Surfaces in Pseudo-Euclidean 4-Space with Neutral Metric*, International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, V. Tarnovo, September 4 – 8, 2018
- 2.11. V. Bencheva, *On the geometry of curves and surfaces in barycentrics* (with M. Hristov), International Colloquium on Differential Geometry and its Related Fields, V. Tarnovo, September 4 – 8, 2018
- 2.12. V. Milousheva, Y. Aleksieva, *Natural PDEs describing minimal Lorentz surfaces in pseudo-Euclidean 4-space with neutral metric*, Symposium on Differential Models in Geometry, Computer Science and Hydrotechnics, DiMoGeCH, Iasi, Romania, May 22 – 25, 2019

### **III. Други резултати от проекта**

#### **1. Отчет за изпълнение на Плана за експлоатация на научните резултати от изпълнението на проекта.**

Научната дейност по проекта е съпроводена с провеждане на работни срещи, на които членовете на колектива представят получените резултати, както и срещаните трудности при решаването на поставените цели и задачи. По този начин се улеснява обмена на идеи между участниците като се подпомага по-нататъшната работа по проекта. Планирани са няколко посещения на световноизвестни чуждестранни учени по покана на екипа на проекта, като са изпратени покани и са направени съответните резервации. Тези посещения ще се състоят в периода до получаване на финансирането за втория етап на проекта. Целта на гостуванията на чуждестранните учени е обмяна на идеи и съвместна работа върху теми от научната програма на проекта, която би довела до съвместни публикации.

С цел както на популяризиране на получените нови резултати, така и да бъде получена обратна информация за тях, членовете на колектива са участвали с доклади в 10 международни научни конференции. Изнесен е и един доклад по покана на Националния колоквиум по математика, който се организира от Съюза на математиците в България.

Като конкретен резултат със съществен потенциал за по-нататъшното разпространение и приложение на получените резултати можем да посочим публикуваните (или приети за публикуване) общо 14 статии в престижни международни списания в областта на математиката и математическата физика, от които 10 в списания с импакт фактор. Получените резултати могат да бъдат приложени в по-нататъшни разработки в областта на геометричната теория на многомерния комплексен анализ, геометрията на комплексните многообразия, теорията на минималните и квази-минималните повърхнини и в други области на математиката и физиката.

## **2. Повишаване на научния капацитет и подготовката на млади учени.**

През отчетния период Яна Алексиева успешно защити дисертационен труд за придобиване на образователна и научна степен „доктор“ на тема „*Лоренцови повърхнини в четиримерно псевдо-Евклидово пространство с неутрална метрика*“. Част от дейността по окончателното оформяне и подготовката за защита на дисертационния труд са извършени в рамките на работен пакет 5 от проекта. Към момента Яна Алексиева заема длъжност главен асистент в СУ „Св. Климент Охридски“.

Участието в колектива на проекта на младия учен Виктория Бенчева, която е задочен докторант на ИМИ – БАН в секция „Анализ, геометрия и топология“, допринася за натрупване на знания и научно-изследователски умения и е предпоставка за успешна подготовка, разработка и защита на дисертационния ѝ труд.

Работата по проекта допринася за получаване на нови знания и умения на всеки член на колектива, което пряко съдейства за повишаване на квалификацията му като изследовател. Повишаването на квалификацията на всеки член на колектива допринася за повишаване на капацитета и на базовата организация.

През 2018 г. проф. Николай Николов бе избран за член-кореспондент на Българската академия на науките. Същият получи покана за гост-професор в Paul Sabatier University of Toulouse.

През отчетния период ръководителят на проекта Величка Милушева спечели конкурс за професор в ИМИ-БАН в област на висше образование 4. *Природни науки, математика и информатика*, професионално направление 4.5. *Математика*, научна специалност *Геометрия и топология (Диференциална геометрия)*.

Публикуването на статии от членовете на колектива по проекта в реномирани списания с импакт-фактор и докладването на резултатите в престижни конференции е пряко свързано с международното признание на членовете на колектива, което се отразява положително върху признанието на базовата организация в международен план.

## **3. Развиване на научно сътрудничество.**

В колектива на проекта участват учени, които са посещавали известни математически центрове в чужбина за съвместна работа с изтъкнати специалисти в областта на диференциалната геометрия и комплексния анализ. Част от участниците в проекта работят в съавторство с колеги от САЩ, Англия, Франция, Русия, Турция, Германия, Полша.

Планираните гостувания на световноизвестни чуждестранни учени по покана на екипа на проекта позволяват ползотворна обмяна на идеи и съвместна работа върху

част от планираните в проекта научни задачи. Това допринася за по-нататъшно разширяване и задълбочаване на научните контакти на членовете на колектива с известни чуждестранни учени в областта на диференциалната геометрия и многомерния комплексен анализ.

Научна степен, акад. длъжност	Име	Месторабота	Млад учен	Подпис
<i>Ръководител на научния колектив :</i>				
<b>Проф. д-р</b>	<b>Величка Милушева</b>	<b>ИМИ-БАН</b>		
<i>Участници в научния колектив:</i>				
<b>Чл.-кор. проф. дмн</b>	<b>Олег Мушкаров</b>	<b>ИМИ-БАН</b>		
<b>Чл.-кор. проф. дмн</b>	<b>Николай Николов</b>	<b>ИМИ-БАН</b>		
<b>Проф. дмн</b>	<b>Йохан Давидов</b>	<b>ИМИ-БАН</b>		
<b>Доц. д-р</b>	<b>Георги Ганчев</b>	<b>Асоцииран член на ИМИ-БАН</b>		
<b>Гл. ас. д-р</b>	<b>Яна Алексиева</b>	<b>СУ „Св. Климент Охридски“, докторант на ИМИ</b>	<b>ДО*</b>	
<b>Ас.</b>	<b>Виктория Бенчева</b>	<b>ВТУ „Св. св. Кирил и Методий“, докторант на ИМИ</b>	<b>МУ, ДО</b>	

\*) В списъка на докторантите и младите учени са включени членовете на колектива на проекта, които са такива в началото на етапа на проекта.